Полиноми

Определение за полином на една променлива

Нека $n \geq 0$ е цяло число.

Израз от вида

$$\boxed{P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,}$$

където $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ са известни числа, а x е променлива, се нарича *полином* на x от степен n.

Числата $a_n \neq 0, a_{n-1}, \ldots, a_1, a_0$ се наричат коефициенти,
$a_n \neq 0$ е старши коефициент,
a_0 е свободен член,
За да посочим *степента* на полинома записваме

$deg(P(x)) = n$ или $P_{(n)}(x)$.

Какво се получава когато $n = 0$?

Всяко число, различно от 0, можем да разглеждаме като полином от нулева степен.

Символът $\sum$

Полиномът $P(x)$ може да се запише съкратено със символът за сума $\sum$

$$P_{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

крайна стойност на брояча (n)

брояч (k)

начална стойност на брояча (0)

Числена стойност на полином

Нека $P(x)$ е полином и x_0 е число.

Стойността $P(x_0)$ на полинома $P(x)$ при $x = x_0$ е числото, което се получава след като в полинома $P(x)$ заместим променливата x с числото x_0 и извършим изчисленията.

Казваме, че числото x_0 *е нула на полинпма* $P(x)$, когато $P(x_0) = 0$

Пример: Ако $P(x) = x^5 - x^2 + x - 2$ и $x_0 = 2,$ то

$$P(2) = 2^5 - 2^2 + 2 - 2 = 32 - 4 \quad \Rightarrow \quad P(2) = 28.$$

Пример: Ако $P(x) = \sum_{k=0}^{4} k!.x^k$ и $x_0 = 2,$ то

$0! = 1$ $\quad 1! = 1$ $\quad 2! = 2$ $\quad 3! = 6$ $\quad 4! = 24$

$k! = 1.2\ldots k$

$$P(2) = \sum_{k=0}^{4} k!.2^k = 0!.2^0 + 1!.2^1 + 2!.2^2 + 3!.2^3 + 4!.2^4$$

$$P(2) = 2^0 + 2^1 + 2.2^2 + 6.2^3 + 24.2^4$$

$$P(2) = 1 + 2 + 2.4 + 6.8 + 24.16$$

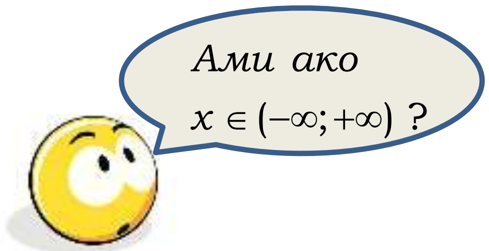
$$P(2) = 1 + 2 + 8 + 48 + 384$$

$$P(2) = 443$$

Равенство на полиноми

Кога два полинома са равни?

Казваме, че два полинома са (тъждествено) равни, когато при всяко значение на променливата x полиномите имат равни стойности.



Не е възможно да се направи проверка за всяко $x \in \mathbb{R}$ (или $x \in \mathbb{C}$)!

Тогава, как можем да установяваме дали два полинома са равни?

Ще ни помага следната Теорема!

Два полинома

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_0 \text{ и } Q(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \ldots + b_0$$

са тъждествено равни, когато:

1) имат една и съща степен ($m = n$) и

2) коефициентите пред еднаквите степени на x са равни ($a_k = b_k$ за всяко $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$).

Равенство на полиноми

Пример: За кои стойности на параметрите a и b полиномите $P(x)=(2a-1)x+b-2$ и $Q(x)=-3x+a-b+5$ са равни?

От Теорема 1 знаем, че за да бъдат равни полиномите $P(x)$ и $Q(x)$, трябва да са изпълнени следните две условия:

1) двата полинома да са от първа степен (защо),

2) коефициентите им пред еднаквите степени на променливата (съответните коефициенти) да са равни, т.е.

$$P(x)=Q(x)\Leftrightarrow \underline{(2a-1)}x+b-2=\underline{-3}x+a-b+5$$

за коефициентите пред x^1 имаме : $2a-1=-3 \Rightarrow \boxed{a=-1}$

$$P(x)=Q(x)\Leftrightarrow (2a-1)x+\underline{b-2}=3x+\underline{a-b+5}$$

за коефициентите пред x^0 имаме : $b-2=a-b+5$

$\Rightarrow b-2=-1-b+5$

$\Rightarrow 2b=4+2 \qquad \Rightarrow \boxed{b=3}$

Действия с полиноми

Действията събиране, изваждане и умножение на полиноми се извършват по правилата за действия (разкриване на скоби) с алгебрични изрази.

Пример: $P(x) = 2x^3 - x + 1, \quad Q(x) = x^2 - x - 1.$

а) $P(x) + Q(x) = ?$

б) $P(x) - Q(x) = ?$

в) $P(x).Q(x) = ?$

Решение:

а) $P(x) + Q(x) = (2x^3 - x + 1) + (x^2 - x - 1) = 2x^3 + x^2 - 2x$

б) $P(x) - Q(x) = (2x^3 - x + 1) - (x^2 - x - 1) = 2x^3 - x^2 + 2$

в) $P(x).Q(x) = (2x^3 - x + 1)(x^2 - x - 1) = 2x^5 + 2x^4 - 2x^3 - x^3 + x^2 + 1 + x^2 - x - 1$

$$= 2x^5 + 2x^4 - 3x^3 + 2x^2 - x$$

Деление на полиноми

Делението на полином $A(x)$ от степен n на полином $B(x)$ от степен m е нетривиално само когато $n \geq m$. Тогава съществува единствена двойка полиноми $Q(x)$ от степен $n{-}m$ и $R(x)$ от степен $s < m$, такива че да е изпълнено равенството

$$\frac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \frac{R(x)}{B(x)}$$

Последното равенство, умножено по $B(x)$ приема вида:

$$A(x) = B(x).Q(x) + R(x).$$

Полиномите, участващи в делението имат следните названия:
$A(x)$ – *делимо*, $B(x)$ – *делител*, $Q(x)$ – *частно* и $R(x)$ – *остатък*.

- Ако $R(x) = 0$, то делението е без остатък и се нарича *точно*.
- Ако делителят е полином от вида $x{-}a$, то $P(x) = (x - a)Q(x) + r$, където $r = P(a)$.

Делението на полиноми може да се извърши по два метода:
- метод на неопределените коефициенти;
- метод на непосредствено деление.

Метод на неопределените коефициенти

Пример: Да се раздели полиномът $A(x) = 2x^3 - x + 1$ на полинома $B(x) = x^2 - x - 1$ по метода на неопределените коефициенти.

Решение:

1) Записваме частното Q(x) и остатъка R(x) с неизвестни, буквени коефициенти:

$$Q_{(1)}(x) = a.x + b \qquad R_{(1)}(x) = c.x + d$$

2) Заместваме $A(x)$, $B(x)$, $Q(x)$ и $R(x)$ в равенството

$$A(x) = B(x).Q(x) + R(x) \quad \rightarrow \quad 2x^3 - x + 1 = (x^2 - x - 1)(a.x + b) + (c.x + d).$$

$$\Leftrightarrow \; 2x^3 - x + 1 = ax^3 + bx^2 - ax^2 - bx - ax - b - 1 + c.x + d$$

$$\Leftrightarrow \; 2x^3 - 1.x + 1 = ax^3 + (b - a)x^2 + (-b - a + c)x + (-b + d)$$

3) Приравняваме коефициентите пред еднаквите степени на x в двете страни на последното равенството и решаваме получените уравнения.

Деление на полиноми

За удобство разменяме изразите в двете страни на равенството:

$$ax^3 + (b-a)x^2 + (-b-a+c)x + (-b+d) = 2x^3 - 1.x + 1$$

$x^3: \; 2 = a$

$x^2: \; b - a = 0 \qquad b - 2 = 0$

$x^1: \; -b - a + c = -1 \qquad -2 - 2 + c = -1$

$x^0: \; -b + d = 1 \qquad -2 + d = 1$

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 2 \\ b = 2 \\ c = 3 \\ d = 3 \end{array}}$$

Окончателно, за частното и остатъка имаме:

$$Q(x) = a.x + b = 2x + 2$$

$$R(x) = cx + d = 3x + 3$$

4) Оформяме крайният резултат по формулата $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R(x)}{B(x)}$

$$\boxed{\frac{2x^3 - x + 1}{x^2 - x - 1} = 2x + 2 + \frac{3x + 3}{x^2 - x - 1}}$$

Непосредствено деление

Пример: Да се раздели полиномът $A(x)=2x^3-x+1$ на полинома $B(x)=x^2-x-1$ по метода на непосредственото деление.

Решение: При непосредствено деление е възприет начин на записване, който напомня писменото деление на цели числа:

$$
\begin{array}{rrrr|l}
A(x)= & 2x^3 & +0.x^2 & -x+1 & B(x)=x^2-x-1 \\ \cline{5-5}
- & 2x^3 & -2x^2 & -2x & 2x \\ \cline{2-4}
 & " & 2x^2 & +x+1 & 2 \\
 & - & 2x^2 & -2x-2 & \\ \cline{3-4}
 & & " & 3x+3 &
\end{array}
$$

$$\left.\begin{matrix} 2x \\ 2 \end{matrix}\right\} Q(x)=2x+2$$

$R(x)=3x+3$

частното

остатъка

Правило на Хорнер - въведение

Нека полиномът делимо е $A(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$, а полиномът делител е $B(x) = x - \alpha$.

В този случай е известен още един, трети метод за деление – деление чрез *правилото на Хорнер*.

За коефициентите $b_{n-1}, b_{n-2}, \ldots, b_0$ на полинома частно

$$Q(x) = b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_1 x + b_0$$

и за остатъка $r = A(\alpha)$, лесно се доказват рекурентните формули (на Хорнер):

$$\begin{aligned}
b_{n-1} &= a_n \\
b_{n-2} &= \alpha.b_{n-1} + a_{n-1} \\
b_{n-3} &= \alpha.b_{n-2} + a_{n-2} \\
&\ldots \\
b_0 &= \alpha.b + a_1 \\
r &= a_0 + \alpha.b_0
\end{aligned}$$

Прието е изчисленията по тези формули да се подреждат в таблица, наричана *Таблица на Хорнер*.

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	$\ldots$	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	$\ldots$	b_0	r

Правило на Хорнер – алгоритъм за пресмятане

Ще изясним правилото на Хорнер с един пример.

Пример: В таблицата на Хорнер за полинома

$$A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$$

попълнете редовете за числата $x_1 = -1$ и $x_2 = -2$.

Колко реда и колко стълба да предвидим в таблицата на Хорнер за полинома $A(x)$ и дадените числа?

Нужни са:

- еди стълб (най-отпред) за записване на числата с което извършваме изчисленията и по един стълб за всеки коефициент на дадения полином, или общо броят на стълбовете е равен на *степента на дадения полином плюс* 2.

- по един ред за всяко число и един ред за коефициентите на дадения полином или общо *броят на числата плюс* 1.

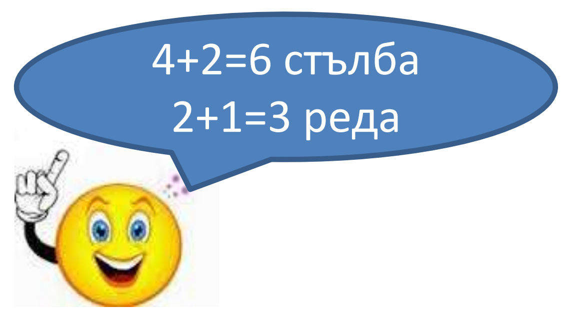


Таблица на Хорнер

$$A(x) = 2.x^4 + 1.x^3 - 17.x^2 - 16.x + 12$$

	2	1	-17	-16	12
-1	2	-1.2+1=-1	-1.(-1)-17=-16	-1.(-16)-16=0	-1.0+12=12
-2	2	-2.2+1=-3	-2.(-3)-17=-11	-2.(-11)-16=6	-2.6+12=0

На практика правилно попълнената таблица изглежда така:

	2	1	-17	-16	12
-1	2	-1	-16	0	12
-2	2	-3	-11	6	0

Приложения на правилото на Хорнер

	a_n	a_{n-1}	a_{n-2}	…	a_1	a_0
α	b_{n-1}	b_{n-2}	b_{n-3}	…	b_0	r

Чрез правилото на Хорнер за даден полином $A(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ и можем:

1) Да намерим частното $Q(x) = \sum_{k=0}^{n-1} b_k\, x^k$ и остатъка r от делението на $A(x)$ на $x - \alpha \to$

$$\mathrm{A}(x) = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0) + r$$

2) Да изчислим стойността $A(\alpha) \ \to\ A(\alpha) = r$.

3) Да проверим дали α е нула на полинома $A(\alpha) \to \alpha$ *е нула на полинома* $A(x)$ *тогава и само тогава, когато* $r = 0$.

4) Да разложим полинома $A(x)$ на множители $\to$ *ако* $r = 0$, *то* $\mathrm{A}(x) = (x - \alpha)(b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + \cdots + b_0)$.

Чрез многократно прилагане на 3) и 4) можем да открием всички нули на даден полином $A(x)$ или да намерим корените на уравнението $A(\alpha) = 0$.

Приложения на правилото на Хорнер

1. Деление на полином $A(x)$ на $x-\alpha$.

$x-\alpha = x-1$

$\Rightarrow \alpha = 1$

Пример : Разделете полинома $A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$ на полинома $B(x) = (x - 1)$.

В таблицата на Хорнер за $A(x)$ ще попълним ред за числото 1.

	2	**1**	**−17**	**−16**	**12**
1	**2**	**3**	**-14**	**-30**	**-18**
$Q(x) =$	$2x^3$	$+3x^2$	$-14x$	-30	

Последното число в реда е равно на остатъка

$r = -18$

Числата преди последното са коефициентите на полинома частно (вземаме ги в реда в който са получени в таблицата.

Крайния резултат записваме във вида $\dfrac{A(x)}{B(x)} = Q(x) + \dfrac{R}{B(x)}$.

$$\frac{2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12}{x-1} = 2x^3 + 3x^2 - 14x - 30 - \frac{18}{x-1}$$

Приложения на правилото на Хорнер

2. Изчисляване на стойността на полином $A(x)$ при $x = a$.

Пример : Да се намерят стойностите $A(1)$, $A(-1)$ и $A(-2)$ на полинома

$$A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$$

В таблица на Хорнер за полинома $A(x)$ ще попълним редовете за числата $1, -1$ и -2.

	2	**1**	**–17**	**–16**	**12**
1	2	3	-14	-30	$\boxed{-18}$
-1	2	-1	-16	0	12
-2	2	-3	-11	6	0

Последното число r, в реда за числото a, е равно на стойността $A(\alpha)$ на полинома $A(x)$ за $x = a$.

$$A(1) = -18$$
$$A(-1) = 12$$
$$A(-2) = 0$$

Приложения на правилото на Хорнер

3. Проверка дали $x = a$ е нула на даден полином.

Пример: Проверете кои от числата -1, -2, 0.5 и - 0.5 са нули на полинома $A(x) = 2x^4 + x^3 - 17x^2 - 16x + 12$.

Числото $x = \alpha$ *е нула на полинома* $A(x)$ тогава и само тогава, когато $A(\alpha) = 0$, т.е. когато в последната колона на реда за α в таблицата на Хорнер за полинома $A(x)$ стои числото **0**.

a	**2**	**1**	**−17**	**−16**	**12**	
-1	2	-1	-16	0	12	*не*
-2	2	-3	-11	6	0	*да*
0.5	2	2	-16	-24	0	*да*
-0.5	2	0	-17	-24.5	0.25	*не*

Приложения на правилото на Хорнер

4. Разлагане на полином на множители.

Вече видяхме, че $x = -2$ е нула на полинома $A(x)$, следователно

$$A(x) = (x+2)(2x^3 - 3x^2 - 11x + 6).$$

Да повторим изчисленията с $x = -2$ и за частното

$$Q(x) = 2x^3 - 3x^2 - 11x + 6$$

a	**2**	**1**	**–17**	**–16**	**12**	
-2	2	-3	-11	6	0	*да*
-2	2	-7	3	0		*да*

Виждаме, че числото –2 е нула и на $Q(x)$. Това показва, че $x = -2$ е двукратна нула на $A(x)$, следователно

$A(x) = (x+2)^2(2x^2 - 7x + 3)$.

Новополученото частно $2x^2 - 7x + 3$ е квадратен тричлен с корени 3 и 0,5 и има разлагане $2x^2 - 7x + 3 = 2(x-3)(x-0{,}5)$.

Следователно $\boxed{A(x) = 2(x+2)^2(x-3)(x-0{,}5)}$.

Свойство на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти

Етиен Безу (1730-1783г) – член на френската академия на науките

Нека коефициентите на полинома

$$A(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

са цели числа.

За рационалните нули на този полином е в сила следващата теорема, която носи името на своя автор.

Теорема на Безу: Ако едно рационално число $\alpha = \frac{p}{q}, p \in \mathbb{Z},, q \in \mathbb{N}$ е нула на полинома, то числото p дели свободния член a_0, а числото q дели старшия коефициент $a_n \neq 0$.

Намиране на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти

Пример: Да се намерят рационалните корени на уравнението
$$6x^3 + 67x^2 + 9x - 22 = 0.$$

Решение:

<u>Първо</u> ще отделим рационалните числа, които биха могли да бъдат корени на даденото уравнение. Съгласно Теоремата на Безу, това са всички дроби от вида
$$\boldsymbol{\alpha = \pm {}^{p}/_{q}},$$
такива, че:

- числото $\boldsymbol{p}$ дели свободния член $\boldsymbol{a_0 = -22}$, т.е.
$$p|22 \rightarrow \boldsymbol{p} \in \{\pm\mathbf{1}, \pm\mathbf{2}, \pm\mathbf{11}, \pm\mathbf{22}\}$$
- числото $\boldsymbol{q}$ дели старшия коефициент $\boldsymbol{a_n = 6}$, т.е.
$$\boldsymbol{q|6} \rightarrow \boldsymbol{q} \in \{\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \mathbf{6}\}.$$

Следователно
$$\alpha \in \left\{\pm1, \pm2, \pm11, \pm22, \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{11}{2}, \pm\frac{1}{3}, \pm\frac{2}{3}, \pm\frac{11}{3}, \pm\frac{22}{3}, \pm\frac{1}{6}, \pm\frac{11}{6}\right\}.$$

Намиране на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти

Второ ще проверим (чрез правилото на Хорнер) кои числа от отделените на първия етап са корени на уравнението.

α	**6**	**67**	**9**	**-22**	
-1	6	73	82	60	-1 не е корен
1	6	61	-52	30	1 не е корен
-2	6	55	-101	180	-2 не е корен
2	6	79	…		2 не е корен
-11	6	1	-2	0	$x_1 = -11$

Намиране на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти

След като отделим един корен на уравнението е удобно да запишем уравнението отново, но във вида:

$$(x+11)(x^2+x-2)=0.$$

Този запис ясно показва, че числото –11 е нула на първия множител и за да намерим останалите корени на уравнението следва да търсим нулите на втория множител, т.е. да намерим корените на уравнението $6x^2+x-2=0$.

$$x_{2,3}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-1\pm\sqrt{1-4.6.(-2)}}{2.6}=\frac{-1\pm\sqrt{49}}{12}\rightarrow x_2=-{}^{2}/_{3}\,,x_3={}^{1}/_{2}$$

Окончателно за корените на изходното уравнение имаме:

$$\boldsymbol{x_1=-11,}\qquad \boldsymbol{x_2=-{}^{2}/_{3}},\qquad \boldsymbol{x_3={}^{1}/_{2}}$$

Допълнение: Каноничният вид на полинома

$$A(x)=6x^3+67x^2+9x-22 \text{ е}$$

$$A(x)=6(x+11)(x-{}^{1}/_{2})(x+{}^{2}/_{3})\ .$$

Съдържание

- **Определение за полином на една променлива … 2 стр.**
- **Символът $\sum$ … 3 стр.**
- **Числена стойност на полином … 4 стр.**
- **Равенство на полиноми … 5 стр.**
- **Събиране, изваждане, умножение и деление на полиноми … 7 стр.**
- **Деление на полиноми … 8 стр.**
- **Метод на неопределените коефициенти … 9 стр.**
- **Непосредствено деление … 11 стр.**
- **Правило на Хорнер … 12 стр.**
- **Правило на Хорнер – алгоритъм за пресмятане … 13 стр.**
- **Приложения на правилото на Хорнер … 15 стр.**
- **Деление на полином $A(x)$ на $x-\alpha$ … 16 стр.**
- **Изчисляване на стойността на полином $A(x)$ при $x=a$ … 17 стр.**
- **Проверка дали $x = a$ е нула на даден полином … 18 стр.**
- **Разлагане на полином на множители. Каноничен вид на полином … 19 стр.**
- **Свойство на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти … 20 стр.**
- **Намиране на рационалните нули на полином с целочислени коефициенти … 21 стр.**