Матрици

Определение за матрица

Матрица от тип $(\boldsymbol{m \times n})$ се нарича правоъгълна таблица от елементи $a_{ij}, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n$, наредени в $\boldsymbol{m}$ реда и $\boldsymbol{n}$ стълба.

$$A_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$\boldsymbol{i}$ – ти ред

$\boldsymbol{j}$ – ти стълб

елемента a_{ij}

Първият индекс $\boldsymbol{i}$ показва номера на реда, а вторият $\boldsymbol{j}$ – номера на стълба в който се намира елемента.

Означения за матрици

Матриците записваме, заградени в скоби ( ), [ ] или ‖ ‖ . Примерно:

$$\boldsymbol{A}_{(2\times 2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \boldsymbol{B}_{(2\times 4)} = \left\| \begin{matrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 & 2 \end{matrix} \right\| \boldsymbol{C}_{(3\times 1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Когато контекста позволява се ползва съкратен запис.

$$A = \left(a_{ij}\right)_{(m\times n)},\ B = \left\| (i+j)^2 \right\|_{(2\times 2)},\ O = [0]_{(m\times n)}.$$

Прието е матриците да се означават с главни букви, а техните елементи – с малки букви.

Основни видове матрици

Правоъгълна матрица се нарича матрица, в която броят на редовете не е равен на броя на стълбовете, т.е. матрица от тип $(m \times n)$, $m \neq n$. Например матриците B, C и D.

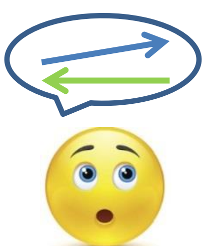
вектор ред

$$B_{(2\times4)} = \begin{Vmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{Vmatrix}, \quad C_{(3\times1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad D_{(1\times4)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

вектор стълб

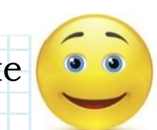
В частност при $n = 1$ матрицата има само един стълб и се нарича **матрица сълб** или **вектор стълб**, а при $m = 1$ матрицата има само един ред и се нарича **матрица ред** или **вектор ред**.

***n*-мерен вектор** наричаме всеки вектор ред или вектор стълб с n елемента. Елементите на векторите се наричат **координати**.



Вектор? Това не беше ли нещо като стрела?

Така изобразяваме само 2-мерните и 3- мерните вектори.



Понятието *n-мерен вектор* е абстрактно понятие. То е обобщение на геометричните вектори. *n-мерните вектори* нямат геометрична интерпретация при $n > 3$, но имат редица практически приложения.

Основни видове матрици

Квадратна матрица от ред *n* се нарича матрица, на която броят на редовете и броят на стълбовете са равни на n, т.е. матрица от тип $(n \times n)$.

$$\mathrm{E}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{Vmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{Vmatrix},\ G = \begin{Vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{Vmatrix},\ H = \begin{Vmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 3 & a & 2 & 3 \\ -1 & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & b \end{Vmatrix}.$$

Елементите на квадратна матрица, с равни първи и втори индекс образуват нейния **главен диагонал**.

$$A_{(n\times n)} = \begin{pmatrix} \boxed{a_{11}} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & \boxed{a_{22}} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \boxed{a_{nn}} \end{pmatrix}$$

Главен диагонал

Втори диагонал

Основни видове матрици

Ако всички елементи на една матрица са 0-ли, то тази матрица се нарича **нулева** и се означава с $O = [0]_{(m\times n)}$.

$$O_{(2\times4)}=\begin{Vmatrix}0&0&0&0\\0&0&0&0\end{Vmatrix},\ O_{(3\times1)}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ O_{(1\times4)}=\begin{pmatrix}0&0&0&0\end{pmatrix},$$

Нулеви вектори

Щом има нулеви матрици, тогава сигурно има и единични матрици, които имат само единици.

Има единични матрици, но...

Единична матрица от ред *n*, е онази квадратна матрица от ред *n*, на която всички елементи по главния диагонал са равни на **1**, а всички елементи извън главния диагонал са равни на **0**.

$$E_2=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\ E_3=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\ E_4=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix},\dots$$

Други видове матрици

Диагонална матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Скаларна матрица

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$$

Симетрична матрица

$$\begin{pmatrix} 2 & \boxed{3} & \boxed{-1} & 4 \\ \boxed{3} & a & 2 & 3 \\ \boxed{-1} & 2 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & -2 & b \end{pmatrix}$$

Горна триъгълна матрица

$$T_u = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & 4 \\ 0 & a & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

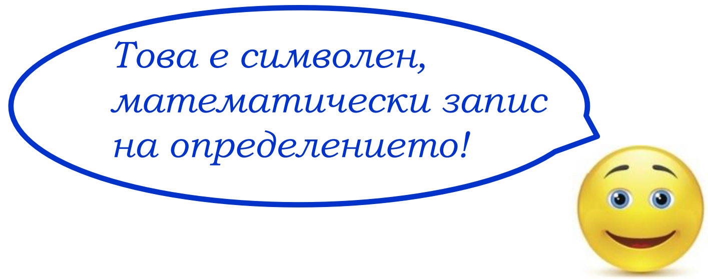
Долна триъгълна матрица

$$T_d = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & a & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 3 & 0 \\ 4 & 2 & 5 & b \end{pmatrix}$$

Равенство на две матрици

Две матрици са равни когато са еднотипни и съответните им елементи са равни, т.е.

$$A_{(m\times n)} = B_{(p\times q)} \overset{def}{\Longleftrightarrow} \begin{cases} m = p,\ \ n = q \\ \text{и} \\ a_{ij} = b_{ij} \text{ за } \forall i = 1,2,\dots,m \text{ и } \forall j = 1,2,\dots,n \end{cases}.$$



Например, матриците $\begin{pmatrix} 1 & p \\ q & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} a & 2 \\ -2 & 3 \\ -1 & b \end{pmatrix}$ са еднотипни и са равни когато $a = 1, b = 7, p = 2, q = -2$ (защо?).

Действия с матрици

Какви действия можем да извършваме с матрици?

Има ли матрична алгебра?

Матричната алгебра включва операциите:

- транспониране на матрица,
- умножение на матрица с число,
- събиране на еднотипни матрици,
- изваждане на еднотипни матрици и
- умножение на две матрици.

Няма действие деление, но има негов заместител.

Операциите събиране, изваждане и умножение с число са свързани със съответните действия с числата и имат аналогични свойства.

Умножението на две матрици е много различно от умножението на две числа и не е комутативно, т.е. в общия случай $A.B \neq B.A$.

Транспониране на матрица

Операцията транспониране е едноаргументна.
Транспонираната на матрицата A се означава с A^T или A'.

$$A_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow A^T{}_{(n\times m)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Първият ред на A е първи стълб на A^T, вторият ред на А е втори стълб на A^T и т.н. Затова, когато А е матрица от тип $(m \times n)$, A^T е матрица от тип $(n \times m)$.

Има ли елементи на матрицата, които не променят местата си при транспониране?

Умножение на матрица с число

Операцията умножение на матрица с число има два аргумента: матрица (например A) и число (например μ).

$$A_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \to \mu A_{(m\times n)} = \begin{pmatrix} \mu a_{11} & \mu a_{12} & \dots & \mu a_{1n} \\ \mu a_{21} & \mu a_{22} & \dots & \mu a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu a_{m1} & \mu a_{m2} & \dots & \mu a_{mn} \end{pmatrix}$$

Умножаваме всеки елемент на матрицата A по числото μ, т.е. $\mu A_{(m\times n)} = (\mu a_{ij})_{(m\times n)}$.

Матрицата $\boldsymbol{-A = -1.A}$ се нарича *противоположна матрица* на матрицата A.

Сбор и разлика на две матрици

Операциите събиране и изваждане на матрици са двуаргументни. Можем да събираме и изваждаме само еднотипни матрици!

$$A_{(m\times n)}=\left(a_{i\,j}\right),B_{(m\times n)}=\left(b_{i\,j}\right)\to A\pm B=\left(a_{i\,j}\pm b_{i\,j}\right)_{(m\times n)}$$

Когато събираме или изваждаме две матрици, събираме или изваждаме съответните им елементи.

Свойства

на операциите събиране, изваждане и умножение на матрица с число:

- $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$ (комутативност)
- $\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}$ (асоциативност на събирането)
- $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}+\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$ (свойство на нулевата матрица)
- $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}-\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O}$ (свойство на противоположната матрица)
- $(\boldsymbol{\lambda\mu})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{\mu A})$ (асоциативност на умножението с число)
- $(\boldsymbol{\lambda}+\boldsymbol{\mu})\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\lambda A}+\boldsymbol{\mu A}$ (дистрибутивност на умножението с число)
- $\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})=\boldsymbol{\lambda A}\pm\boldsymbol{\lambda B}$ (дистрибутивност на умножението с число)
- $\mathbf{1}.\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A};\quad \mathbf{0}.\boldsymbol{A}=\boldsymbol{O};\quad \boldsymbol{\lambda}.\boldsymbol{O}=\boldsymbol{O}$

Пример. Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$.

Изчислете матриците: $\boldsymbol{2A + 3B^T}$ и $\boldsymbol{2A^T + 3B}$.

$$2A + 3B^T = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 6 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix} a & d \\ b & e \\ c & f \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 & 8 \\ -2 & 6 \\ -2 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 3d \\ 3b & 3e \\ 3c & 3f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+3a & 8+3d \\ -2+3b & 6+3e \\ -2+3c & 14+3f \end{pmatrix}$$

$$2A^T + 3B = 2\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -1 & 3 \\ -1 & 7 \end{pmatrix}^T + 3\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 8 & 6 & 14 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3a & 3b & 3c \\ 3d & 3e & 3f \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2+3a & -2+3b & -2+3c \\ 8+3d & 6+3e & 14+3f \end{pmatrix}$$

Умножаване на „ред по стълб“
(скаларно произведение на два вектора)

ред · стълб = число

Умножаваме всеки елемент на вектора ред по съответния му елемент на вектора стълб и сумираме получените произведения.

$$\begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 4 & 7 \end{pmatrix}^T$$

$$14 + 0 + 12 + 28 \quad = 54$$

Умножаване на матрица по вектор стълб

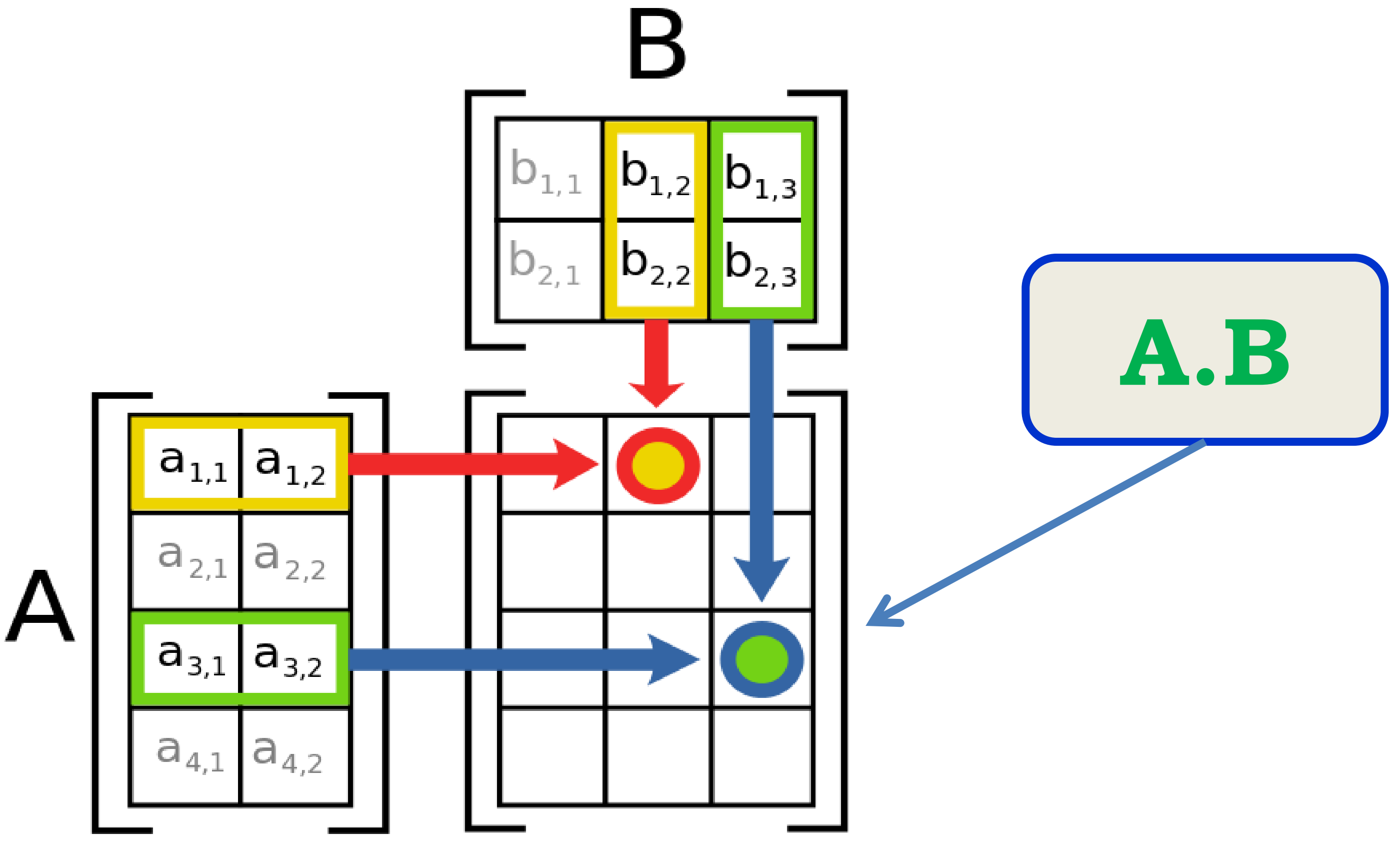
матрица $m \times n$. стълб $n \times 1$ = Матрица стълб $m \times 1$

Всеки ред на матрицата умножаваме скаларно по вектора стълб и получените числа подреждаме в матрица стълб.

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & 0 \\ -5 & 6 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 \\ 7 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3.8 + -1.7 + 2.2 \\ 4.8 + 2.7 + 0.2 \\ -5.8 + 6.7 + 1.2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 21 \\ 46 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Умножаване на две матрици
(ред по стълб)

Умножаването на две матрици се извършва по правилото «ред по стълб», като всеки ред на лявата матрица се умножава скаларно по всеки стълб на дясната матрица.



Кога е възможно умножаването две матрици?

A.B=C

Матрицата ***A*** (записана отляво), можем да умножим по матрицата ***B*** (записана отдясно), тогава и само тогава когато, във всеки ред на ***A*** има точно толкова елементи, колкото има във всеки стълб на ***B***.

Матричното произведение ***A.B*** съществува, тогава и само тогава, когато *броят на стълбовете на **A** е равен на броя на редовете на **B**.*

$$\text{Ако } A_{(m\times n)},\quad B_{(n\times p)} \quad \text{и} \quad C = A.B, \quad \text{то} \quad C_{(m\times p)}$$

Ако $A_{2\times3}$, а $B_{3\times2}$, то $(A.B)_{2\times2}$

а $(B.A)_{3\times3}$

Това означава, че

$A.B \neq B.A$

Пример за умножение на матрици

$$\begin{pmatrix} \boxed{3 \quad 1 \quad 2} \\ 4 \quad 2 \quad 0 \\ 5 \quad 6 \quad 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \left\langle \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 8 & 7 & 2 \end{matrix} \right\rangle & \left\langle \begin{matrix} 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 8 & 7 & 2 \end{matrix} \right\rangle & \left\langle \begin{matrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\rangle \\ \left\langle \begin{matrix} 5 & 6 & 1 \\ 8 & 7 & 2 \end{matrix} \right\rangle & \left\langle \begin{matrix} 5 & 6 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{matrix} \right\rangle \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 24+7+4 & 3+2+6 \\ 32+14+0 & 4+4+0 \\ 40+42+2 & 5+12+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 & 11 \\ 46 & 8 \\ 84 & 20 \end{pmatrix}$$

Свойство на нулевите матрици

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A.O = O}$$

$$A_{(m\times n)}O_{(n\times p)} = O_{(m\times p)}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{O.A = O}$$

$$O_{(l\times m)}A_{(m\times n)} = O_{(l\times n)}$$

Свойство на единичните матрици:

$$\begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 4 \\ 3 & -6 & 8 \\ 11 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{A.E = E.A = A}$$

$$A_{(m\times n)}E_{(n)} = E_{(m)}A_{(m\times n)} = A_{(m\times n)}$$

Пример: (*Умножаване на стълб с ред*) Да се изчисли произведението А.В на матриците $A = \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}_{(3\times 1)} . \begin{pmatrix} 2 & 5 & 3 \end{pmatrix}_{(1\times 3)} = \begin{pmatrix} 7.2 & 7.5 & 7.3 \\ 0.2 & 0.5 & 0.3 \\ -4.2 & -4.5 & -4.3 \end{pmatrix}_{(3\times 3)} =$$

$$= \begin{pmatrix} 14 & 35 & 21 \\ 0 & 0 & 0 \\ -8 & -20 & -12 \end{pmatrix}$$

Запомнете, че при умножението на две матрици комутативния закон не е в сила!

$$A.B \neq B.A$$

Нещо повече, възможно е едното от двете произведения $\boldsymbol{A.B}$ *и* $\boldsymbol{B.A}$ *да съществува, а другото не.*

Но, все пак, може ли да се случи матрицата $\boldsymbol{A.B}$ *да е равна на матрицата* $\boldsymbol{B.A}$*?*

Има случаи, в които равенството $\boldsymbol{A.B = B.A}$ *е вярно.*

Когато за две матрици A и B е в сила равенството $\boldsymbol{A.B = B.A}$ казваме, че тези матрици са комутативни.

Какъв е типът на две матрици, ако те са комутативни?

Комутативни могат да бъдат само квадратни матрици от един и същи ред.

Пример: Намерете всички матрици $\boldsymbol{X}$, комутативни на матрицата $A = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix}$.

Решение:

- Матрицата X трябва да е квадратна матрица от втори ред, т.е. тя трябва да има вида $X = \begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix}$
- За да определим стойностите на числата $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}$ и $\boldsymbol{t}$ ще съставим и ще решим една система от уравнения, която се получава като приравним съответните елементи на двете матрици $\boldsymbol{A}.\boldsymbol{X}$ и $\boldsymbol{X}.\boldsymbol{A}$.

$$\left.\begin{array}{l} \boldsymbol{A}.\boldsymbol{X} = \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x+4z & y+4t \\ 2x-z & 2y-t \end{Vmatrix} \\ \boldsymbol{X}.\boldsymbol{A} = \begin{Vmatrix} x & y \\ z & t \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & -1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} x+2y & 4x-y \\ z+2t & 4z-t \end{Vmatrix} \\ A.X = X.A \end{array}\right\} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} x+4z = x+2y \\ y+4t = 4x-y \\ 2x-z = z+2t \\ 2y-t = 4z-t \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 2y-4z=0 \\ 4x-2y-4t=0 \\ 2x-2z-2t=0 \\ \cancel{2y-4z=0} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} y=2z \\ 4x-4z-4t=0 \\ \cancel{2x-2z-2t} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} y=2z \\ x=z+t \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$X = \begin{Vmatrix} z+t & 2z \\ z & t \end{Vmatrix}$$

за всички стойности на z и t.

Пример: Да се намери такава матрица X, че да е в сила равенството $X.A = B$, където

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Решение:

- Като вземем предвид типът на матриците $A_{(2\times 2)}$ и $B_{(1\times 2)}$ и условието $X_{(m\times n)}.A_{(n\times p)} = B_{(m\times p)}$ разбираме, че $\boldsymbol{m = 1}$ и $\boldsymbol{n = 2}$, т.е. матрицата X трябва да има 1 ред и 2 стълба.

  Следователно, матрицата X има вида $\boxed{\boldsymbol{X = (x \quad y)}}$.

- За да определим стойностите на числата $\boldsymbol{x, y}$ ще съставим и ще решим система от уравнения, която се получава като приравним съответните елементи на матриците $\boldsymbol{X.A}$ и $\boldsymbol{B}$.

$$X.A = (x \quad y).\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (2x - y \quad -6x + 3y) = B = (2 \quad 3)$$

$$\Rightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ -6x + 3y = 3 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ 2x - y = -1 \end{array} \right.$$

- Лесно се съобразява, че последната система няма решение, следователно не съществува матрица X, която е решение на уравнението $X.\begin{pmatrix} 2 & -6 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = (2 \quad 3)$.

Обратна матрица

Пример: Дадени са матриците $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$.
Изчислете матриците $\boldsymbol{A.B}$ и $\boldsymbol{B.A}$.

Решение:

$$A.B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & -2+2 \\ 15-15 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B.A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-5 & 3-3 \\ -10+10 & -5+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A.B=B.A=E

Когато $\boldsymbol{A.B = B.A = E}$, казваме, че матрицата $\boldsymbol{B}$ е обратна на матрицата $\boldsymbol{A}$ и записваме $\boldsymbol{B = A^{-1}}$.

Не всяка матрица има своя обратна матрица. Само квадратните матрици имат обратни матрици и то при определени условия.

Квадратна матрица, която има обратна, се нарича *обратима* или *неособена*, а такава, която няма обратна се нарича *необратима* или *особена*.

Как можем да намерим обратната на неособена, квадратна матрица?

Ще докажем, че ако

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \text{ и } ad \neq bc, \text{ то } A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Доказателство: Да означим $ad - bc = \Delta \neq 0$. Тогава

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ba \\ cd-dc & -cb+da \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Аналогично:

$$\frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} da-bc & db-bd \\ -ca+ac & -cb+da \end{pmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} \Delta & 0 \\ 0 & \Delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Следователно

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Матрични уравнения

Сега ще разгледаме едно важно приложение на обратните матрици – за намиране на неизвестната матрица X в (матрични) уравнения от вида $A.X = B$ и $X.A = B$, където A е дадена, неособена, квадратна матрица, а B е дадена правоъгълна или квадратна матрица от подходящ тип.

Пример: Решете уравнението $A.X = B$, ако $A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Решение:

- Умножаваме двете страни на даденото уравнение по A^{-1} отляво и получаваме: $A^{-1}A.X = A^{-1}.B \Rightarrow E.X = A^{-1}.B \Rightarrow \boxed{X = A^{-1}.B}$.
- Определяме матрицата A^{-1}

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \Delta = 2.3 - (-1).(-5) = 1 \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

- Изчисляваме матрицата $X = A^{-1}.B$

$$X = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Проверка: $A.X = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 23 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 46-45 \\ -23+27 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Пример: Решете уравнението $X.A = B$, ако

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Решение: Умножаваме двете страни на даденото уравнение по A^{-1} отдясно и получаваме: $X.A.A^{-1} = B.A^{-1} \Longrightarrow X.E = B.A^{-1} \Longrightarrow \boxed{X = B.A^{-1}}$.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}. \qquad X = B.A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}.$$

Проверка:

$$X.A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 8 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

Когато решаваме матрични уравнения от вида $\boldsymbol{A.X = B}$ или $\boldsymbol{X.A = B}$ умножаваме двете страни на уравнението по матрицата $\boldsymbol{A^{-1}}$, но е нужно да внимаваме и да умножаваме от тази страна, от която се намира матрицата $\boldsymbol{A}$, защото целта е тези две матрици да застанат непосредствено една до друга.

Освен това, този метод за решаване на матрични уравнения е приложим, само когато матрицата $\boldsymbol{A^{-1}}$ съществува.

Съдържание

- **Определение за матрица 2 стр.**
- **Означения за матрици 3 стр.**
- **Основни видове матрици 4-7 стр.**
- **Равенство на две матрици 8 стр.**
- **Действия с матрици 9 стр.**
    - **Транспониране на матрица 10 стр.**
    - **Умножение на матрица с число 11 стр.**
    - **Сбор и разлика на две матрици 12-13 стр.**
    - **Умножаване „ред по стълб“ (скаларно произведение) 14 стр.**
    - **Умножаване на матрици (ред по стълб) 15-16 стр.**
    - **Кога е възможно умножаването две матрици? 17 стр.**
    - **Примери и свойства 18-20 стр.**
    - **Комутативност при умножението на матрици 21 стр.**
    - **Примери 22-23 стр.**
- **Обратна матрица. 24-25 стр.**
- **Матрични уравнения 26-27 стр.**