Важно за изпита

- Изпитът включва два етапа: е-тест и писмен изпит.
- е-теста, съдържа:
  - 8 въпроса с 1 верен от 3 възможни отговора. Всеки верен отговор на тези въпроси носи по 4 точки.
  - 2 въпроса с отворен отговор. Единият носи до 7 точки, а другият – до 8 точки.

- Решенията на задачите трябва да се записват в изпитна тетрадка.
  - При правилно написано решение по даден въпрос, към точките за верният отговор се добавят 2 допълнителни точки.
  - При липса на решение и при неправилно решение от 4-те точки за верен отговор се изваждат 2 точки.

- Времето за провеждане на е-теста е 70 минути. Резултатите ще се дават същия ден или най-късно на следващия работен ден.
- До вторият етап на изпита се допускат само студентите, получили на е-теста повече от 30 точки.

- Освобождаване от е-теста е възможно, само по предложение на преподавателя, водил лабораторните Ви упражнения. Той има основание да направи такова предложение за всеки студент, за който броят на точките (Т) от проведените през семестъра контролни работи е:
  - $T \geq 35$ и е предал всички домашни от модулите А и В. Освободените по това правило студенти са покрили изискванията за оцека Мн. Добър (5). Те се явят за Отличен като решават една задача с по-висока трудност (за 12 точки).
  - $28 \leq T \leq 34$ и е предал всички домашни от модул А. Освободените по това правило студенти са покрили изискванията за оцека Добър (4). Те се явятват за Мн. добър или Отличен, като решават писмено две задачи с по-висока трудност (всяка по 12 точки).

- Освобождават се от изпит с оценка Отличен (6) студентите участвали в олимпиадата по компютърна математика, ако са получили поне по 8 точки на всяко контролно и са предали всички домашни.

- В помощ на самоподготовката Ви за изпита ще можете да решавате тренировъчни тестове, които ще бъдат достъпни на вашият личен акаунт в системата за е-обучение на ТУ-Варна. Ще получите име и парола в центъра за дистанционно обучение, 1-ви етаж в НУК, зала 120.

Тестови изпитни задачи с избор на един верен от 3 възможни отговора

Първа задача

- **Комплексни числа**:

  ✓ преминаване от алгебричен в тригонометричен вид,
  ✓ действия с комплексни числа - събиране, изваждане, умножение, деление и степенуване.

- **Полиноми**:

  ✓ деление на полиноми с частно и остатък,
  ✓ метод на неопределените коефициенти,
  ✓ приложение на правилото на Хорнер за намиране на:
    - рационалните нули на полином,
    - числова стойност на полином,

  ✓ Каноничен вид на полином – представяне като произведение на неразложими множители с реални коефициенти.

Втора задача

- **Матрици**:
  - ✓ видове матрици и действия с матрици,
  - ✓ матрични полиноми,
  - ✓ елементарни преобразувания на матрица,
  - ✓ ранг на матрица,
  - ✓ обратна матрица,
  - ✓ матрични уравнения.

- **Детерминанти**
  - ✓ от втори и трети ред,
  - ✓ от по-висок от трети ред.

- **Системи линейни алгебрични уравнения**:
  - ✓ теорема на Кроникер-Капелли,
  - ✓ метод на Крамер,
  - ✓ метод на Гаус.

Трета задача

- **Функция:** изследване на функция за
  - ✓ четност,
  - ✓ нечетност,
  - ✓ периодичност.

- **Диференциране:**
  - ✓ производна от първи, втори и по-висок ред;
  - ✓ първи и втори диференциал на функция;
  - ✓ полиноми на Тейлър и Маклорен.

- **Граници:**
  - ✓ едностранни и двустранни граници;
  - ✓ непрекъснатост;
  - ✓ правило на Лопитал.

Четвърта задача

- **Изследване** на функция за:
  - ✓ монотонност;
  - ✓ локални екстремуми;
  - ✓ абсолютни екстремуми;
  - ✓ изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексни точки.

- **Асимптоти:** изследване функция за наличие на
  - ✓ хоризонтални,
  - ✓ вертикални и
  - ✓ наклонени

асимптоти.

Пета задача

- **Неопределен интеграл:**
  - ✓ непосредствено интегриране,
  - ✓ Внасяне на израз зад знака на диференциала,
  - ✓ интегриране по части,
  - ✓ интегриране чрез полагане.

Шеста задача

Определен интеграл:

- ✓ Формула на Нютон-Лайбниц,
- ✓ интегриране по части,
- ✓ интегриране чрез полагане.

Приложение на определен интеграл за:

- ✓ намиране лице на равнинна фигура

Приложение на определен интеграл за решаване на ОДУ.

Седма задача

Координатни системи. Координати на:

- ✓ точка и вектор;
- ✓ среда на отсечка,
- ✓ медицентър на триъгълник.

Линейни операции с вектори.

- ✓ умножение на вектор с число,
- ✓ сбор и разлика на два вектора,
- ✓ линейна комбинация на вектори.

Метрични операции с вектори:

- ✓ Пресмятане на скаларно, векторно и смесено произведение на вектори.
- ✓ Намиране на дължина на вектор и дължина на отсечка,
- ✓ Намиране на косинус на ъгъл между два вектора,
- ✓ Определяне на вида на триъгълник според страните,
- ✓ Определяне на вида на триъгълник според ъглите.

Осма задача

Трансформация на декартова координатна система:

- ✓ транслация;
- ✓ ротация
- ✓ обща трансформация.

- **Линейни преобразувания в равнината:**

- ✓ симетрия спрямо точка
- ✓ симетрия спрямо хоризонтална или вертикална права
- ✓ ротация
- ✓ транслация
- ✓ хомотетия (мащабиране).

Тестови изпитни задачи

с отворен отговор

Девета и десета задача

- **Коренуване на комплексни числа**.
- **Решаване на уравнения или системи от уравнения с параметър**.
- **По-сложни примери за изследване на функция или пресмятане на интеграл.**
- **Намиране на производната на дадена функция чрез определението за производна.**
- **Линейна комбинация на вектори. Линейна зависимост или линейна независимост на вектори.**
- **По-сложни примери от произведения на вектори или преобразувания в равнината.**
- **Задача за доказателство.**

1.1. На колко са равни модулът и аргументът на комплексното число $z = \sqrt{3} - i$.

Решение:

$|z| = r = ?$

$z = \sqrt{3} - i \Rightarrow \quad Re(z) = a = \sqrt{3}\,, \qquad Im(z) = b = -1$

$|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\sqrt{3}^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = \sqrt{4} = 2 \qquad \boldsymbol{r = 2}$

$Arg(z) = \varphi = ?$

$tg(\varphi) = \dfrac{b}{a} = \dfrac{-1}{\sqrt{3}} = -\dfrac{\sqrt{3}}{3} = -tg(30^o) = tg(-30^o)$

$\Rightarrow \quad \varphi = -30^o = -\frac{\pi}{6}$ или $\varphi = -30^o + 180^o = 150^0 = \frac{5\pi}{6}$

От $a = \sqrt{3} > 0$ и $b = -1 < 0 \Rightarrow z$ е в IV-ти квадрант.

Следователно $\boldsymbol{\varphi = -\frac{\pi}{6}}$.

1.2. Ако z = $\sqrt{3} - i$ то каква е стойността на израза $A = \frac{2+3i}{2-i} - z.\overline{z}$, където със $\overline{z}$ е означено комплексно-спрегнатото число на z .

Решение:

$$A = \frac{2+3i}{2-i} - z.\overline{z} =$$

$$= \frac{(2+3i)(2+i)}{(2-i).(2+i)} - \left(\sqrt{3} - i\right)\left(\sqrt{3} + i\right) =$$

$$= \frac{4+2i+6i+3i^2}{2^2-i^2} - \left(\sqrt{3}^2 - i^2\right) =$$

$$= \frac{4+8i-3}{4+1} - (3+1) = \frac{1+8i}{5} - 4$$

$$= \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i - 4 \Rightarrow \boldsymbol{A = -3,8 + 1,6i}$$

1.3. Намерете частното $Q(x)$ и остатъка $R(x)$ при делението на полинома

$\boldsymbol{A(x) = 3x^4 - 18x^2 - 6 + 13x}$ с полинома $\boldsymbol{B(x) = x^2 + x - 3}$.

Решение:

$$A(x) = 3x^4 \quad - 18x^2 + 13x - 6 \qquad \big| \; B(x) = x^2 + x - 3$$

$$3x^2$$

$$-3x^3 - 9x^2 + 13x - 6 \qquad -3x$$

$$-6x^2 + 4x - 6 \qquad -6$$

$$10x - 24$$

частно $Q(x) = 3x^2 - 3x - 6$

остатък $R(x) = 10x - 24$

1.4. Чрез **правилото на Хорнер** изчислете $A(d)$, ако

$$\boldsymbol{A(x) = 3x^4 - 18x^2 - 6 + 13x} \text{ и } \boldsymbol{d = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}.$$

Решение:

$$d = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix} = 2.5 - (-3).(-4) = 10 - 12 = -2$$

	3	0	-18	13	-6
-2	3	-6	-6	25	-56

$$A(d) = A(-2) = -56$$

2.1. Изчислете стойността на детерминантата $d = \begin{vmatrix} 13 & 23 & 14 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{vmatrix}$?

Решение:

$$\begin{vmatrix} 13 & 23 & 14 & 5 \\ 0 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & -4 & 2 & -6 \\ 0 & -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 13.(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} -2 & 1 & -3 \\ -4 & 2 & -6 \\ -1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 13[-12+6+36-6-36+12] = 0$$

2.2. Решете матричното уравненеие A.X.B=C, ако:

$$A = \begin{Vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{Vmatrix}, B = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{Vmatrix} \text{ и } C = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{Vmatrix}$$

Решение:

$$A.X.B = C \;\Rightarrow X = A^{-1}.C.B^{-1}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{-1}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.\begin{pmatrix} 1 & 8 & -3 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \ldots$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

2.3. Определете ранга на матрицата $A = \left\| \begin{matrix} 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 1 \end{matrix} \right\|$,

Решение:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ & & -1 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} (-2)(-3) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ & & & & \\ 0 & -8 & -13 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ & & & & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow r(A) = 2$$

2.4. Решете системата $\left|\begin{array}{lllll} 2x_1 & -4x_2 & -x_3 & +x_4 & =0 \\ x_1 & +2x_2 & +6x_3 & +x_4 & =1 \\ 3x_1 & -2x_2 & +5x_3 & +2x_4 & =1 \end{array}\right.$

Решение:

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} 2 & -4 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ 3 & -2 & 5 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 6 & 1 & 1 \\ & & -13 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow r(A)=r(\overline{A})=2$$

$$\left|\begin{array}{lllll} x_1 & +2x_2 & +6x_3 & +x_4 & =1 \\ & -8x_2 & -13x_3 & -x_4 & =-2 \end{array}\right. \Rightarrow \left|\begin{array}{llll} x_1 & +2x_2 & +6x_3 & +2-8x_2-13x_3=1 \\ x_4=2 & -8x_2 & -13x_3 & \end{array}\right. \Rightarrow$$

$$\left|\begin{array}{lll} x_1=-1 & +6x_2 & +7x_3 \\ x_4=2 & -8x_2 & -13x_3 \end{array}\right.$$

$$\boxed{X=\begin{pmatrix} 6a+7b-1 \\ a \\ b \\ -8a-13b+2 \end{pmatrix}, \forall a,b \in \mathbb{R}}$$

3.1. Дадена е функцията $\boldsymbol{f(x)=\frac{e^x-x-1}{x}, x\neq 0}$. Намерете диференциалът df, стойността на първата производна на $f(x)$ за $x=1$.

Решение:

Ще започнем с намирането на първата производна $f'(x)$.

$$f'(x)=\left[\frac{e^x-x-1}{x}\right]^/=\frac{(e^x-x-1)^/.x-(e^x-x-1).x'}{x^2}$$

$$f'(x)=\frac{(e^x-1)x-(e^x-x-1).1}{x^2} \qquad \Rightarrow \boldsymbol{f'(x)=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}}$$

Сега за $f'(1)$ получаваме $\quad f'(1)=\frac{1e^1-e^1+1}{1^2}=\frac{1}{1} \quad \boldsymbol{f'^{(1)}=1}$

За първия диференциал на функцията имаме

$$\boldsymbol{df=\frac{xe^x-e^x+1}{x^2}dx}$$

3.2. Дадена е функцията $f(x) = \frac{e^x - x - 1}{x}, x \neq 0$. Изчислете границата $\lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x}$.

Решение:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2}.$$

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - x - 1}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Получената неопределеност от вида $\left[\frac{0}{0}\right]$, може да се преобразува чрез правилото на Лопитал:

$$L = \lim_{x\to 0} \frac{(e^x - x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{2x} = \left[\frac{0}{0}\right] =$$

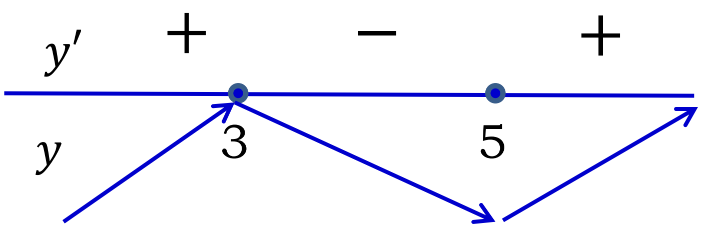
$$= \lim_{x\to 0} \frac{\left(e^x - 1\right)'}{(2x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{e^x}{2} = \frac{1}{2} \qquad \Rightarrow L = \frac{1}{2}$$

4.1. Намерете интервалите на растене и намаляване и локалните екстремуми на функцията $\boldsymbol{y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 23}$.

Решение:

$$y' = 3x^2 - 24x + 45 = 3(x^2 - 8x + 15)$$

$$y' = 0 \Leftrightarrow x^2 - 8x + 15 = 0 \Rightarrow$$



$$\boxed{x_1 = 3;\ x_2 = 5}$$

За $x \in (-\infty; 3)$ функцията е **растяща**
За $x \in (3; 5)$ функцията е **намаляваща**
За $x \in (5; +\infty)$ функцията е **растяща**

$$\boldsymbol{y = f(3) = f_{max} = 27 - 108 + 135 - 23 = 31}$$

$$\boldsymbol{y = f(5) = f_{min} = 125 - 300 + 225 - 23 = 27}$$

4.2. Намерете абсолютните екстремуми на функцията

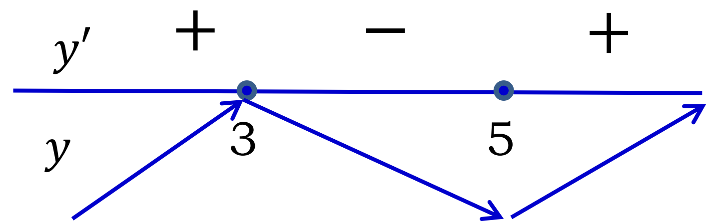
$$y = f(x) = x^3 - 12x^2 + 45x - 23.$$

в интервала $[1; 4]$.

Решение:

$$y = f(1) = 1 - 12 + 45 - 23 = 11$$

$$y = f(4) = 64 - 192 + 180 - 23 = 29$$



$$y = f(3) = f_{max} = 31$$

$$y = f(5) = f_{min} = 27$$

$$\max_{[1;4]} f(x) = \max\{f(1) = 11; f(3) = 31; f(4) = 29\} = \mathbf{31} = f(3)$$

$$\min_{[1;4]} f(x) = \min\{f(1) = 11; f(5) = 27; f(4) = 29\} = \mathbf{11} = f(1)$$

$$\Rightarrow \max_{[1;4]} f(x) = f(3) = 31$$

$$\Rightarrow \min_{[1;4]} f(x) = f(1) = 11$$

3.3. Запишете полинома на Маклорен от трета степен за функцията
$\boldsymbol{y = f(x) = x.\sin(2x)}$.

Решение :

$$F_{(3)}(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3$$

$$f(0) = 0.\sin(2.0) = 0 \Rightarrow \boxed{f(0) = 0}$$

$$f'(x) = \left[x.\sin(2x)\right]' = \sin(2x) + 2x.\cos(2x) \Rightarrow$$

$$f'(0) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{f'(0) = 0}$$

$$f''(x) = \left[\sin(2x) + 2x.\cos(2x)\right]' = \ldots =$$

$$= 4\cos(2x) - 4x.\sin(2x) \Rightarrow \boxed{f''(0) = 4}$$

$$f'''(x) = \left[4\cos(2x) - 4x.\sin(2x)\right]' = \ldots =$$

$$= -12\sin(2x) - 8x.\cos(2x) \Rightarrow \boxed{f'''(0) = 0}$$

$$F_{(3)}(x) = \boxed{0} + \boxed{0}\,x + \frac{\boxed{4}}{2!}x^2 + \frac{\boxed{0}}{3!}x^3$$

4.3. Намерете интервалите на изпъкналост, вдлъбнатост и инфлексните точки на функцията $y = f(x) = \frac{x}{4-x^2}$.

Решение:

$$x \in (-\infty; +\infty) \setminus \{-2; 2\}$$

$$y' = \frac{4 - x^2 + 2x^2}{(4 - x^2)^2} = \frac{x^2 + 4}{\left(4 - x^2\right)^2} \qquad y'' = \left[\frac{x^2 + 4}{\left(4 - x^2\right)^2}\right]' = \dots = \frac{2x\left(x^2 + 12\right)}{\left(4 - x^2\right)^3}$$

x		-2		0		2	
y''	$-$		$+$		$-$		$+$
y	$\cap$		$\cup$		$\cap$		$\cup$

За $x \in (-\infty; -2)$ функцията е **вдлъбната**

За $x \in (-2; 0)$ функцията е **изпъкнала**

За $x \in (0; 2)$ функцията е **вдлъбната**

За $x \in (2; +\infty)$ функцията е **изпъкнала**

$x = 0$ е инфлексна точка

$x = -2$ и $x = 2$ са точки на прекъсване!

4.4. Да се докаже, че функцията $y = f(x) = \frac{x}{4-x^2}$ има две вертикални асимптоти.

Решение:

$$\lim_{x \to -2^-} \frac{x}{4-x^2} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$$

Следователно правата с уравнение $x = -2$ е вертикална асимптота за графиката на функцията $y = f(x) = \frac{x}{4-x^2}$.

$$\lim_{x \to 2^-} \frac{x}{4-x^2} = \frac{-2}{0^+} = -\infty$$

Следователно правата с уравнение $x = 2$ също е вертикална асимптота за графиката на функцията $y = f(x) = \frac{x}{4-x^2}$.

4.5. Да се изследва за наклонени асимптоти функцията
$$y = g(x) = x + sin(2x).$$

Решение :

$$\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{x+\sin(2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{1+2\cos(2x)}{1} = 1 + 2\left[\lim_{x\to\infty}\cos(2x)\right]$$

Но функцията $\cos(2x)$ е периодична и няма граница при $x \to \infty$. Следователно графиката на функцията $y = g(x) = x + \sin(2x)$ няма наклонена асимптота.

5.1. Пресметнете интегралът $\boldsymbol{I_1 = \int [8x^3 - 3 + x.sin(\pi x)]dx}$

$$I_1 = \int [8x^3 - 3 + x.\sin(\pi x)]dx$$

$$I_1 = 8\int x^3 dx - 3\int dx + \frac{1}{\pi}\int x.\sin(\pi x)\, d(\pi x)$$

$$I_1 = 8\frac{x^4}{4} - 3x + \frac{1}{\pi}\int x.d(-\cos(\pi x))$$

$$I_1 = 2x^4 - 3x + \frac{1}{\pi}\left[-x.\cos(\pi x) + \int \cos(\pi x)\, dx\right]$$

$$I_1 = 2x^4 - 3x + \frac{1}{\pi}\left[-x.\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi}\int \cos(\pi x)\, d(\pi x)\right]$$

$$I_1 = 2x^4 - 3x + \frac{1}{\pi}\left[-x.\cos(\pi x) + \frac{1}{\pi}\sin(\pi x)\right] + \mathrm{c}$$

5.2. Да се намери частното решение на диференциалното уравнение

$$y'' = \frac{1}{(x+1)^2} + 4cos(2x),$$

което удовлетворява условията $y(0) = 1$ и $y'(0) = 3$.

Решение

1) Интегрират се двете страни на даденото уравнение:

$$\int y''dx = \int \frac{1}{(x+1)^2}dx + \int 4co\,s(2x)\,dx \;\Rightarrow$$

$$y' = \frac{-1}{x+1} + 2sin(2x) + a \quad (1)$$

2) След интегриране на равнство (1) и се получава общото решение на даденото диференциално уравнение (в което участват две произволни константи, толкова колкото е реда изходното ОДУ):

$$\int y'dx = -\int \frac{1}{x+1}dx + 2\int \sin(2x)\,dx + a\int dx \;\Rightarrow$$

$$y = -ln|x+1| - \cos(2x) + ax + b \qquad (2)$$

3) След като е известно общото решение на даденото ОДУ е нужно да се подберат участващите в него произволни константи a и b, така че да се удовлетворяват и дадените допълнителни условия $\boldsymbol{y(0)=1}$ и $\boldsymbol{y'(0)=3}$. За определянето на подходящите стойности на a и b трябва да се заместят $\boldsymbol{x=0}$, $\boldsymbol{y=1}$ и $\boldsymbol{y'=3}$ в равенствата (1) и (2).

$$y'=\frac{-1}{x+1}+2sin(2x)+a \quad (1)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{-1}{1}+2sin(0)+a=3 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{a=4}$$

$$y=-ln|x+1|-\cos(2x)+ax+b \qquad (2)$$

$$\Rightarrow -ln(1)-cos(0)+b=1 \;\Leftrightarrow\; \boldsymbol{b=2}$$

4) Заместваме получените стойности за константите a и b в общото решение и намираме търсеното частно решение:

$$\boxed{\boldsymbol{y=-ln|x+1|-cos(2x)+4x+2}}$$

6.1. Пресметнете интегралът $\boldsymbol{I_2 = \int_4^{12} \sqrt{x-3}dx}$

$I_2 = \int_4^7 \frac{x-2}{\sqrt{x^2-2x-3}}dx$

Удобно е да се приложи субституцията на Хорнер $x = t - \frac{b}{2a}$.

1) Полагаме: $\boldsymbol{x = t + 1}$

2) Подготовка :

- $x^2 - 2x - 3 = (t+1)^2 - 2(t+1) - 3 = t^2 - 4 \ \Rightarrow \boldsymbol{x^2 - 2x - 3 = t^2 - 4}$
- $x - 2 = t + 1 - 2 = t - 1 \ \Rightarrow \boldsymbol{x - 2 = t - 1}$
- $dx = d[t+1] = [t+1]'dt = 1.dt \ \Rightarrow \ \boldsymbol{dx = dt}$

$\boldsymbol{x}$	**4**	**7**
$t = x - 1$	3	6

$$I_2 = \int_3^6 \frac{t-1}{\sqrt{t^2-4}}dt = \int_3^6 \frac{t}{\sqrt{t^2-4}}dt - \int_3^6 \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}dt$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}dt^2 - \ln\left|t + \sqrt{t^2-4}\right| \Bigg|_3^6$$

$$I_2 = \frac{1}{2}\int_3^6 \frac{1}{\sqrt{t^2-4}}d(t^2-4) - \ln(6+\sqrt{32}) + \ln(3+\sqrt{5})$$

$$I_2 == \frac{1}{2}(t^2-4)^{\frac{1}{2}}.2 \Bigg|_3^6 - \ln(6+\sqrt{32}) + \ln(3+\sqrt{5})$$

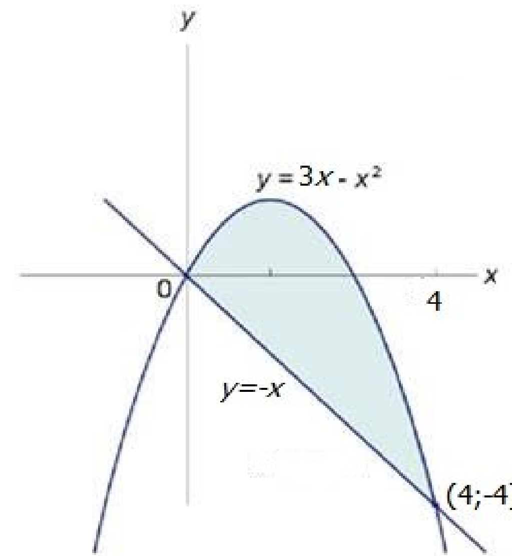
$$\boldsymbol{I_2 = \sqrt{32} - \sqrt{5} - \ln(6+\sqrt{32}) + ln(3+\sqrt{5})}$$

6.2. Изобразете графично и намерете лицето на частта от равнината, заключена между графиките на функциите

$$y = f_1(x) = -x^2 + 3x, \qquad y = f_2(x) = -x.$$

Решение:

1) Чертежа вдясно показва, че областта заградена от графиките на двете функции е криволинеен трапец, двете основи на който са изродени в точки – пресечните точки на правата с уравнение $y = -x$ и параболата с уравнение $y = -x^2 + 3x$.



2) Лицето на криволинеен трапец се изчислява по формулата

$$S = \int_a^b [f(x) - g(x)]dx,$$

където числата a и b са равни на абсцисите съответно на най-лявата и на най-дясната точка на областта, а $f(x)$ и $g(x)$ са функциите, графиките на които заграждат областта съответно отгоре и отдолу.

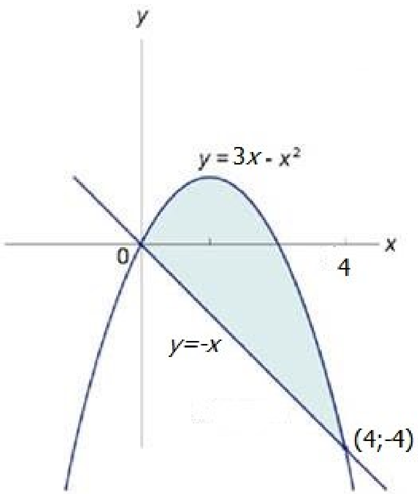
3) Абсцисите на пресечните точки се определят като решения на системата, образувана от уравненията на двете линии:

$$\left| \begin{array}{l} \boldsymbol{y = -x^2 + 3x} \\ \boldsymbol{y = -x} \end{array} \right.$$

или

като решение на уравнението $\boldsymbol{-x^2 + 3x = -x}$.

В случая намираме, че $\boldsymbol{a = 0, b = 4}$.



4) Трапецът е ограничен отгоре от параболата, а отдолу от правата.

5) Следователно за лицето S се получава:

$$S = \int_0^4 [-x^2 + 3x - (-x)]\,\mathrm{d}x$$

$$S = \int_0^4 [-x^2 + 4x]\,\mathrm{d}x$$

$$S = -\frac{x^3}{3} + 2x^2 \Bigg|_0^4 = -\frac{64}{3} + 32 - 0$$

$$\boxed{\boldsymbol{S = \frac{32}{3}}}$$

7.1. Дадени са векторите $\vec{a}(-2{,}1{,}3)$ и $\vec{b}(3,-1{,}2)$. Да се намерете скаларното произведение $\vec{a}.\vec{b}$, векторното произведение $\vec{a}\times\vec{b}$ и косинуса на ъгъла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:

За изчисляване на скаларното и векторното произведение на векторите $\vec{a}(a_1,a_2,a_3)$ и $\vec{b}(b_1,b_2,b_3)$ разполагаме с формулите :

$$\vec{a}.\vec{b} = a_1b_2 + a_{\mathbf{2}}b_2 + a_3b_3 \ \text{ и}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Като ги приложим за векторите $\vec{a}(-2{,}1{,}3)$ и $\vec{b}(3,-1{,}2)$, намираме:

$$\vec{a}.\vec{b} = (-2{,}1{,}3)(3,-1{,}2) = -2.3 + 1.(-1) + 3.2 = -6 - 1 + 6 = -1 \qquad \boldsymbol{\vec{a}.\vec{b} = -1}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}, -\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} \right) = (5{,}13.-1)$$

$$\boldsymbol{\vec{a}\times\vec{b} = (5, 13. -1)}$$

7.2. Дадени са векторите $\vec{a}(-2,1,3)$ и $\vec{b}(3,-1,2)$. Да се намери косинуса на ъгъла между $\vec{a}$ и $\vec{b}$.

Решение:

Косинуса на $\measuredangle(\vec{a},\vec{b})$ се изчислява по формулата

$$cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{\vec{a},\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a}.\vec{b} = -1, \\ |\vec{a}| = \sqrt{4+1+9} = \sqrt{14}, \\ |\vec{b}| = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{-1}{\sqrt{14}.\sqrt{14}}$$

$$\boldsymbol{cos\measuredangle(\vec{a},\vec{b}) = -\frac{1}{14}}$$

7.3. Точките $A(2,1,0), B(6,-3,0)$ и $D(2.-1,6)$ са върхове на успоредник $ABCD$. Да се намери дължината на височината на успоредника, спусната от върха D към страната BC.

Решение: За да се изчисли дължината на височината h_{BC} трябва да се състави и реши уравнение с неизвестно h_{BC} . Такова уравнение се получава след като се изрази лицето на успоредника по два различни начина, чрез формулите

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$$

$$S_{ABCD} = |\overrightarrow{BC}|.h_{BC} = |\overrightarrow{AD}|.h_{BC}$$

и се приравнят получените два израза.

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (4,-4,0) \\ \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = (0,-2,6) \end{array}\right\} \Rightarrow \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4 & -4 & 0 \\ 0 & -2 & 6 \end{vmatrix} = (-24,-24,-8)$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = |\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AD}| = \sqrt{(-24)^2 + (-24)^2 + (-8)^2} = 8\sqrt{19} \quad \Rightarrow \quad S_{ABCD} = 8\sqrt{19}$$

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = (4,-6,6) \\ |\overrightarrow{AC}| = \sqrt{4^2 + (-6)^2 + 6^2} = 2\sqrt{22} \end{array}\right\} \Rightarrow S_{ABCD} = h_{BC}.2\sqrt{22}$$

$$\left.\begin{array}{l} S_{ABCD} = h_{BC}.2\sqrt{22} \\ S_{ABCD} = 8\sqrt{19} \end{array}\right\} \Rightarrow h_{BC}.2\sqrt{22} = 8\sqrt{19} \Rightarrow \qquad h_{BC} = \frac{2\sqrt{418}}{11}$$

7.4. Намерете дължината на височината, спусната през върха D на триъгълната пирамида $ABCD$ с върхове

$\boldsymbol{A(2,1,1), B(3,1,-3), C(-1,1,3)}$ и $\boldsymbol{D(2,3,-1)}$.

Решение:

1. От формулата за обем на пирамида

$$V = \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} . H_D$$

се изразява височината

$$H_D = \frac{3V}{S_{\Delta ABC}} = \frac{3.\frac{1}{6}\left|\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right|}{\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}$$

$$\boxed{\boldsymbol{H_D = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\,\overrightarrow{AC}\,\overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}}}$$

2. Последователно се получават:

$$\overrightarrow{AB} = (3-2,1-1,-3-1) = (1,0,-4)$$
$$\overrightarrow{AC} = (-1-2,1-1,3-1) = (-3,0,2)$$
$$\overrightarrow{AD} = (2-2,3-1,-1-1) = (0,2,-2)$$

$\overrightarrow{AB}\ (1,0,-4)$
$\overrightarrow{AC}\ (-3,0,2)$
$\overrightarrow{AD}\ (0,2,-2)$

$$\left|\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)\right| = \left\|\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{matrix}\right\| = \left|\begin{matrix} 1 & 0 & -4 \\ -3 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{matrix}\right| = 20$$

$$\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 4 \\ -3 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -14\vec{j} = (0,-14,0) \qquad \left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right| = \sqrt{14^2} = 14$$

$$H_D = \frac{\left|\left(\overrightarrow{AB}\ \overrightarrow{AC}\ \overrightarrow{AD}\right)\right|}{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|} = \frac{20}{14} = \frac{10}{7}$$

$$\boxed{\boldsymbol{H_D = \frac{10}{7}}}$$

8.1. Дадени са точките $A(2,-1), B(3,7)$ и $C(4,0)$. Намерете координатите на образа M' на медицентъра M на ΔABC при хомотетията с център т.O(0,0) и коефициент на хомотетия $k=-2$ и изчислете дължината на отсечката $A'M'$.

Решение:

$$M=?\quad M\left(\frac{2+3+4}{3};\frac{-1+7+0}{3}\right)\Rightarrow M(3;2)$$

$$M'=?\quad \begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=-2x_M=-2.3=-6 \\ y'=-2y_M=-2.2=-4 \end{cases} \Rightarrow M'(-6;-4)$$

$$A'=?\quad \begin{cases} x'=kx \\ y'=ky \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'=-2x_A=-2.2=-4 \\ y'=-2y_A=-2.(-1)=2 \end{cases} \Rightarrow A'(-4;2)$$

$$|A'M'|=\sqrt{(x_M-x_A)^2+(y_M-y_A)^2}$$

$$|A'M'|=\sqrt{(-6-(-4))^2+(-4-2)^2}=\sqrt{(-2)^2+(-6)^2}=\sqrt{40}=2\sqrt{10}$$

$$\boldsymbol{|A'M'|=2\sqrt{10}}$$

8.2. Определете координатите на образът $\boldsymbol{M'} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{M})$ на средата $\boldsymbol{M}$ на отсечката $\boldsymbol{AB}$ с краища $\boldsymbol{A}(\mathbf{3}, -\mathbf{5})$ и $\boldsymbol{B}(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$, при централната симетрия $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{P})$ с център т. $\boldsymbol{P}(\mathbf{3}, -\mathbf{1})$.

Решение:

$$M = ? \quad M\left(\frac{3-1}{2}; \frac{-5+1}{2}\right) \Rightarrow M(1;-2)$$

$$M' = ? \quad \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -x_M + 2x_P = -1 + 2.3 = 5 \\ y' = -y_M + 2y_P = 2 + 2.(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(5;0)$$

Дадена е точка $\boldsymbol{M}(\mathbf{2}, -\mathbf{1}, \mathbf{3})$. Намерете новите координати на $\boldsymbol{M}$, ако координатната система се завърта около оста Ox на ъгъл 90° в положителна посока.

8.3. Определете координатите на образът $\boldsymbol{M}' = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{M})$ на средата $\boldsymbol{M}$ на отсечката $\boldsymbol{AB}$ с краища $\boldsymbol{A}(\mathbf{3}, -\mathbf{5})$ и $\boldsymbol{B}(-\mathbf{1}, \mathbf{1})$, при централната симетрия $\boldsymbol{s} = \boldsymbol{s}(\boldsymbol{P})$ с център т. $\boldsymbol{P}(\mathbf{3}, -\mathbf{1})$.

Решение:

$$M = ? \quad M\left(\frac{3-1}{2}; \frac{-5+1}{2}\right) \Rightarrow M(1;-2)$$

$$M' = ? \quad \begin{cases} x' = -x + 2a \\ y' = -y + 2b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x' = -x_M + 2x_P = -1 + 2.3 = 5 \\ y' = -y_M + 2y_P = 2 + 2.(-1) = 0 \end{cases} \Rightarrow M'(5;0)$$

Задачите за 5 и 6

- **Коренуване на комплексни числа**.
- **Решаване на уравнения или системи от уравнения с параметър**.
- **По-сложни примери за изследване на функция или пресмятане на интеграл. Намиране на производната на дадена функция чрез определението за производна.**
- **Линейна комбинация на вектори. Линейна зависимост или линейна независимост на вектори.**
- **По-сложни примери от произведения на вектори или преобразувания в равнината.**
- **Задача за доказателство.**
- **Нестандартна задача.**

На всички пожелавам успешна първа сесия!