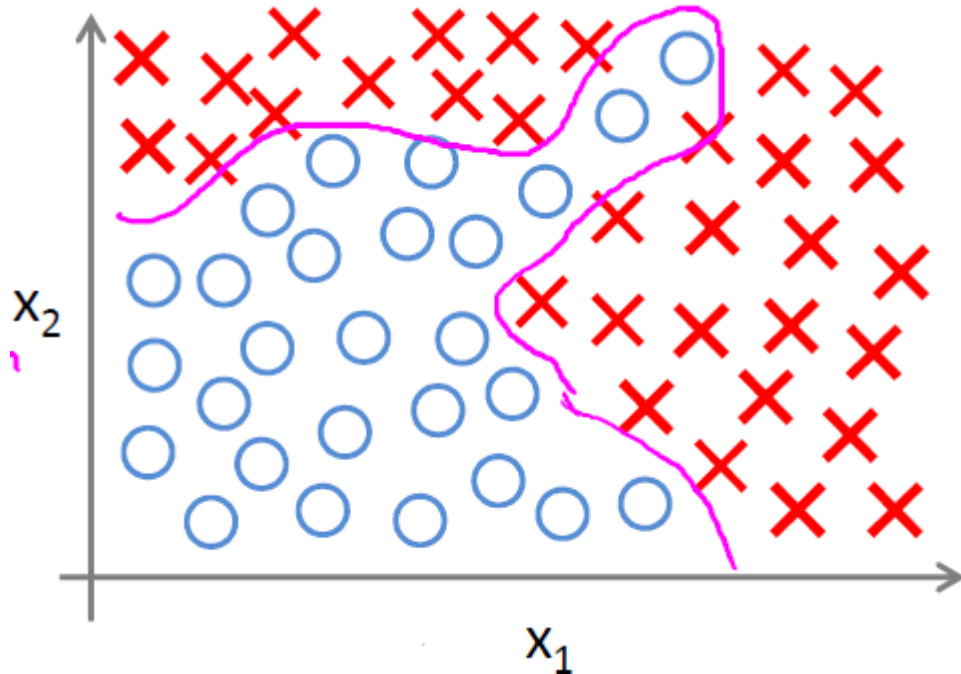


Невронни мрежи - представяне

Доц. д-р Ивайло Пенев

Кат. „Компютърни науки и технологии“

Необходимост – сложни нелинейни класификатори



Данни за къщи:
x0 - площ
x1 – брой спални
x2 – брой етажи
x3 - възраст
x4
...
x100

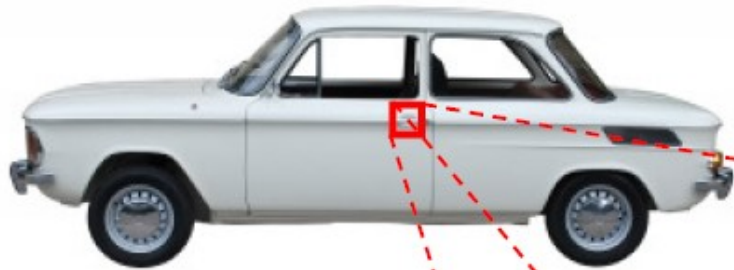
$$h_{\theta}(x) = g(\theta_0 + \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_1 x_2 + \theta_4 x_1^2 x_2 + \theta_5 x_1^3 x_2 + \theta_6 x_1 x_2^2 + \dots)$$

При 100 променливи параметрите в хипотезата са около 170000 => сложността на логаритмичната регресия е $O(n^3)$.

Разпознаване на изображения

What is this?

You see this:



But the camera sees this:

194	210	201	212	199	213	215	195	178	158	182	209
180	189	190	221	209	205	191	167	147	115	129	163
114	126	140	188	176	165	152	140	170	106	78	88
87	103	115	154	143	142	149	153	173	101	57	57
102	112	106	131	122	138	152	147	128	84	58	66
94	95	79	104	105	124	129	113	107	87	69	67
68	71	69	98	89	92	98	95	89	88	76	67
41	56	68	99	63	45	60	82	58	76	75	65
20	43	69	75	56	41	51	73	55	70	63	44
50	50	57	69	75	75	73	74	53	68	59	37
72	59	53	66	84	92	84	74	57	72	63	42
67	61	58	65	75	78	76	73	59	75	69	50

Компютърно зрение - пример

Computer Vision: Car detection



Cars

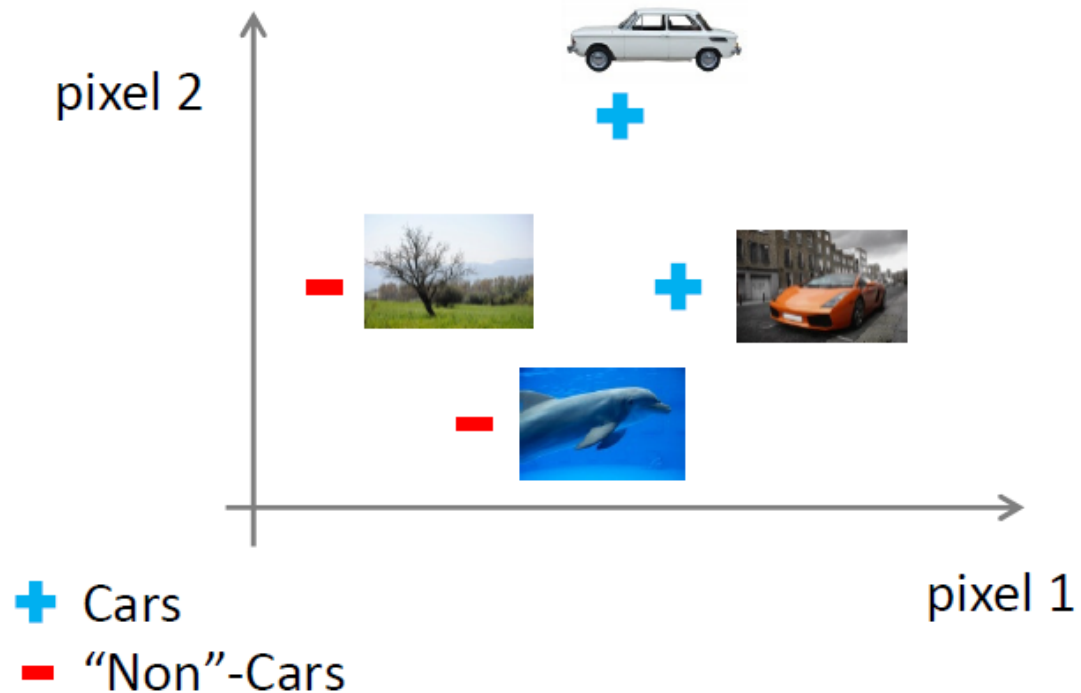
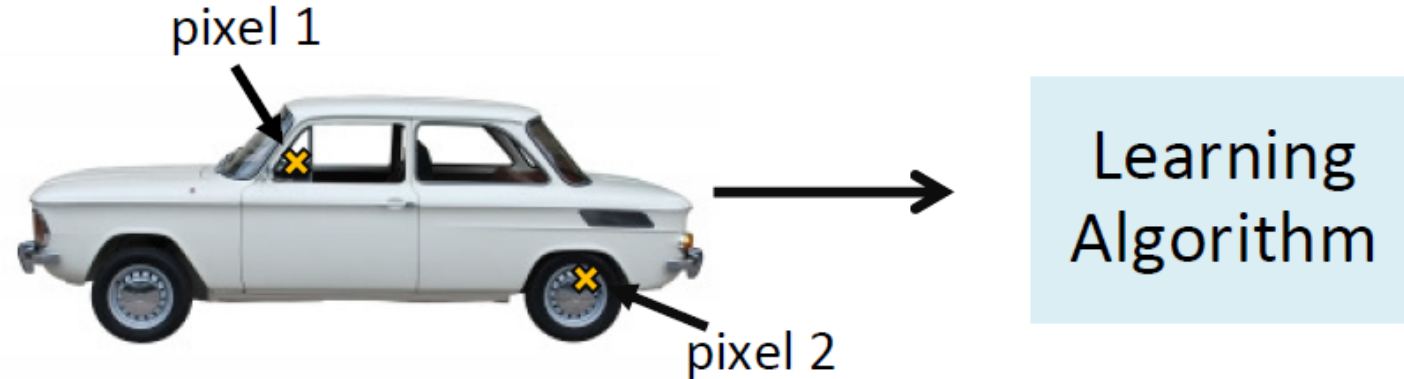


Not a car

Testing:



Разпознаване на изображение на кола

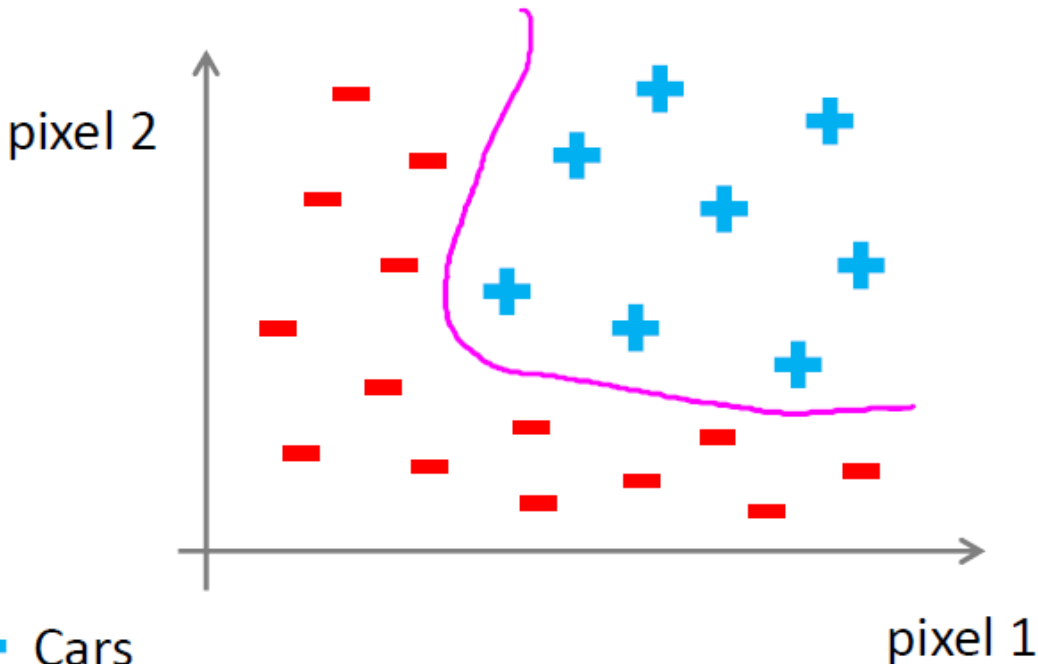


Разпознаване на изображение на кола



Learning Algorithm

50 x 50 pixel images \rightarrow 2500 pixels
 $n = 2500$ (7500 if RGB)



+ Cars
- "Non"-Cars

$$\rightarrow x = \begin{bmatrix} \text{pixel 1 intensity} \\ \text{pixel 2 intensity} \\ \vdots \\ \text{pixel 2500 intensity} \end{bmatrix}$$

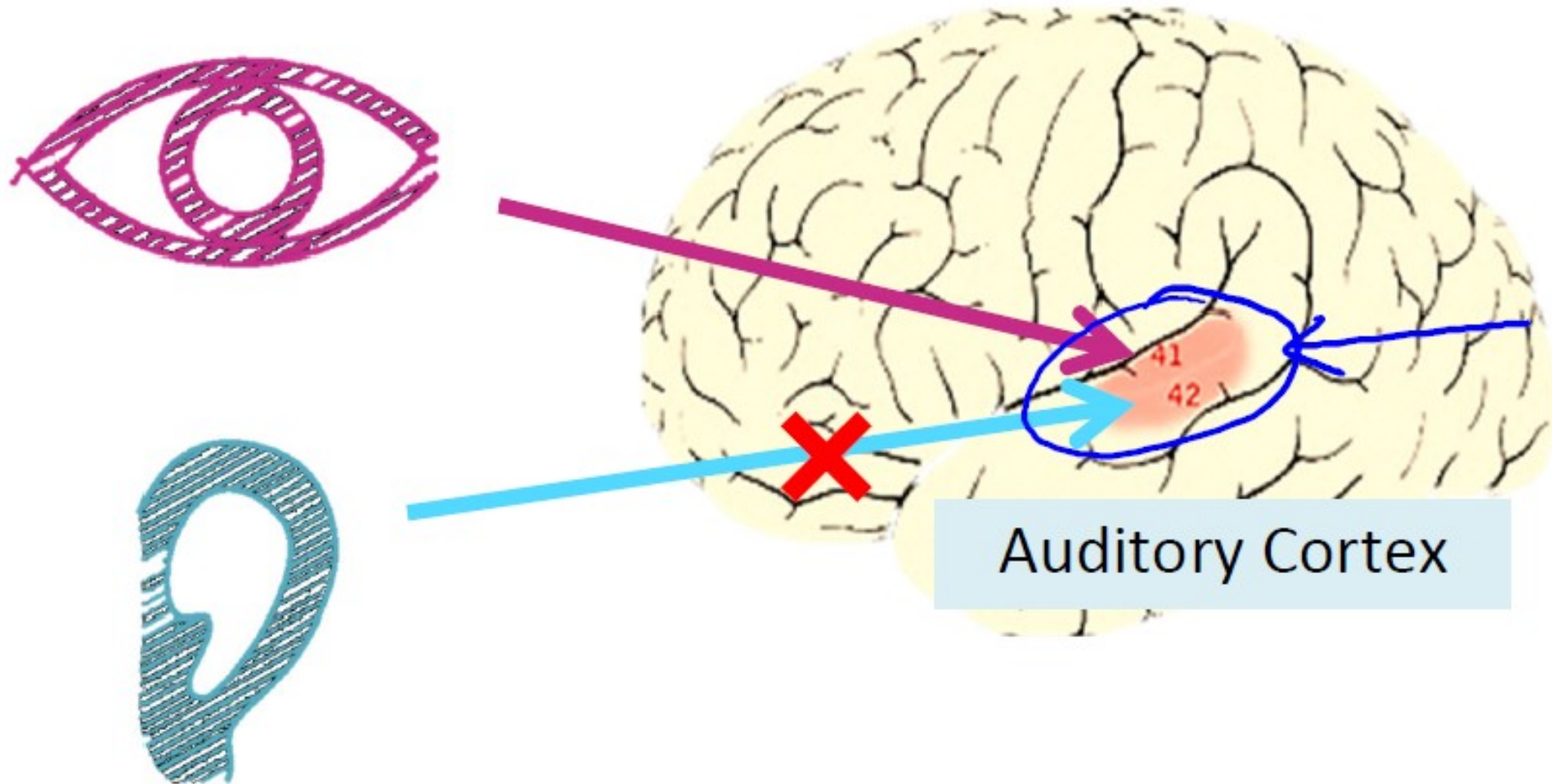
Handwritten notes: '0-255' with arrows pointing to the intensity values in the vector x .

Quadratic features ($x_i \times x_j$): \approx 3 million features

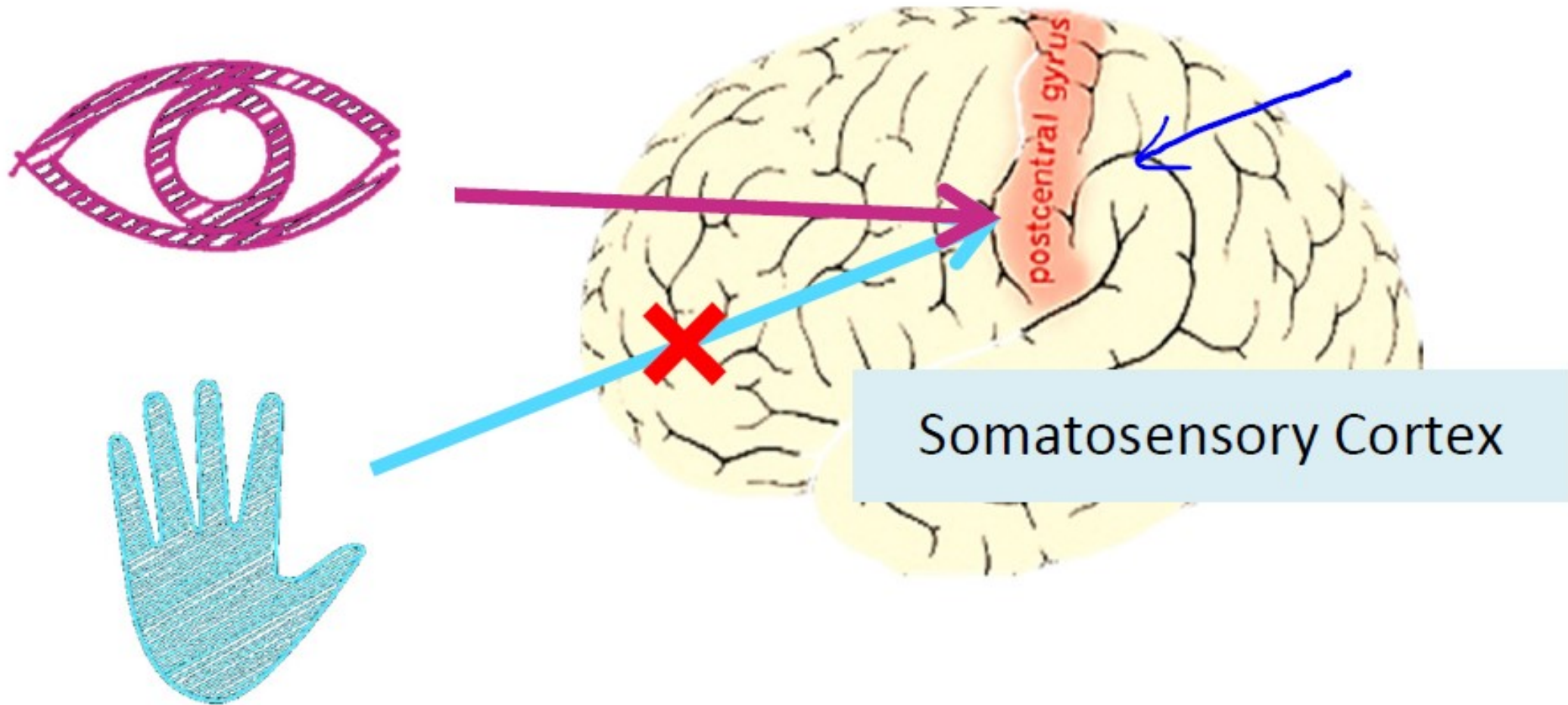
Невронни мрежи

- Произход – алгоритми, които имитират човешкия мозък
- Много популярни през 80-те и началото на 90-те, по-късно популярността им намалява
- В наши дни – възраждане поради активната работа за създаване на „изкуствен интелект“

Пример за обучение в човешкия мозък – слухов кортекс



Пример за обучение в човешкия мозък – соматосензорен кортекс



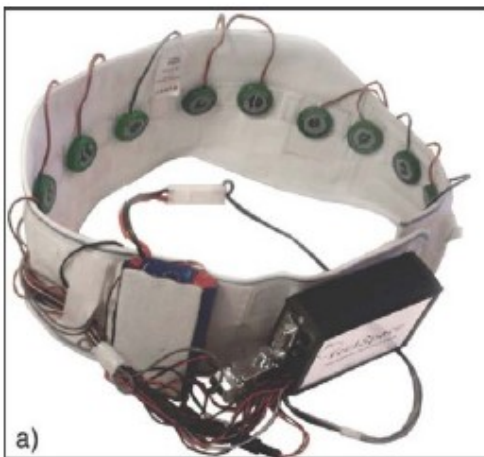
Още примери



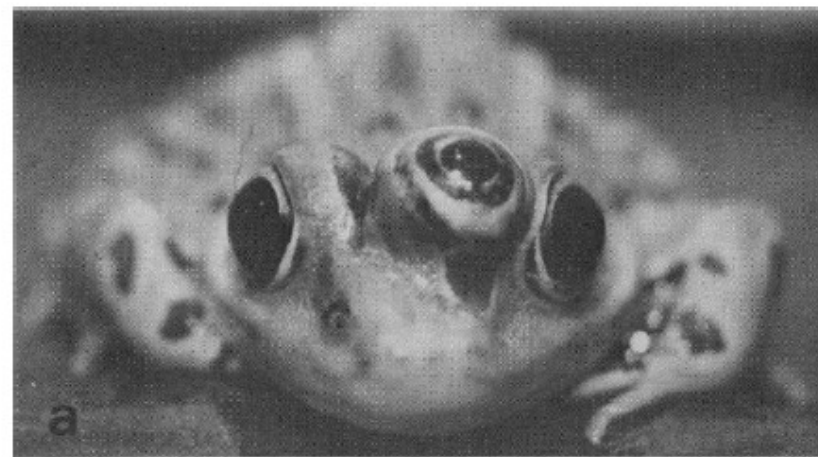
Seeing with your tongue



Human echolocation (sonar)

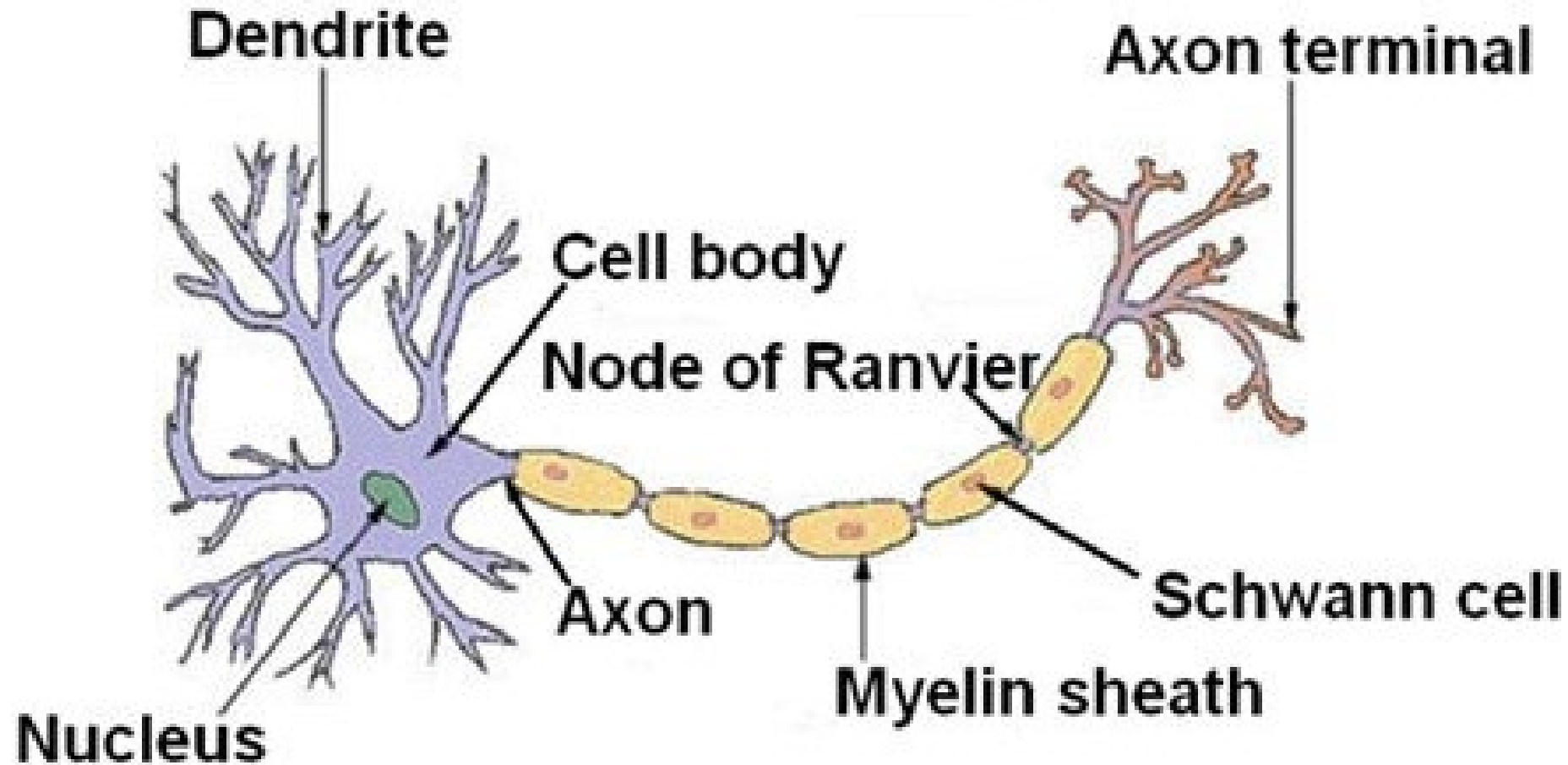


Haptic belt: Direction sense

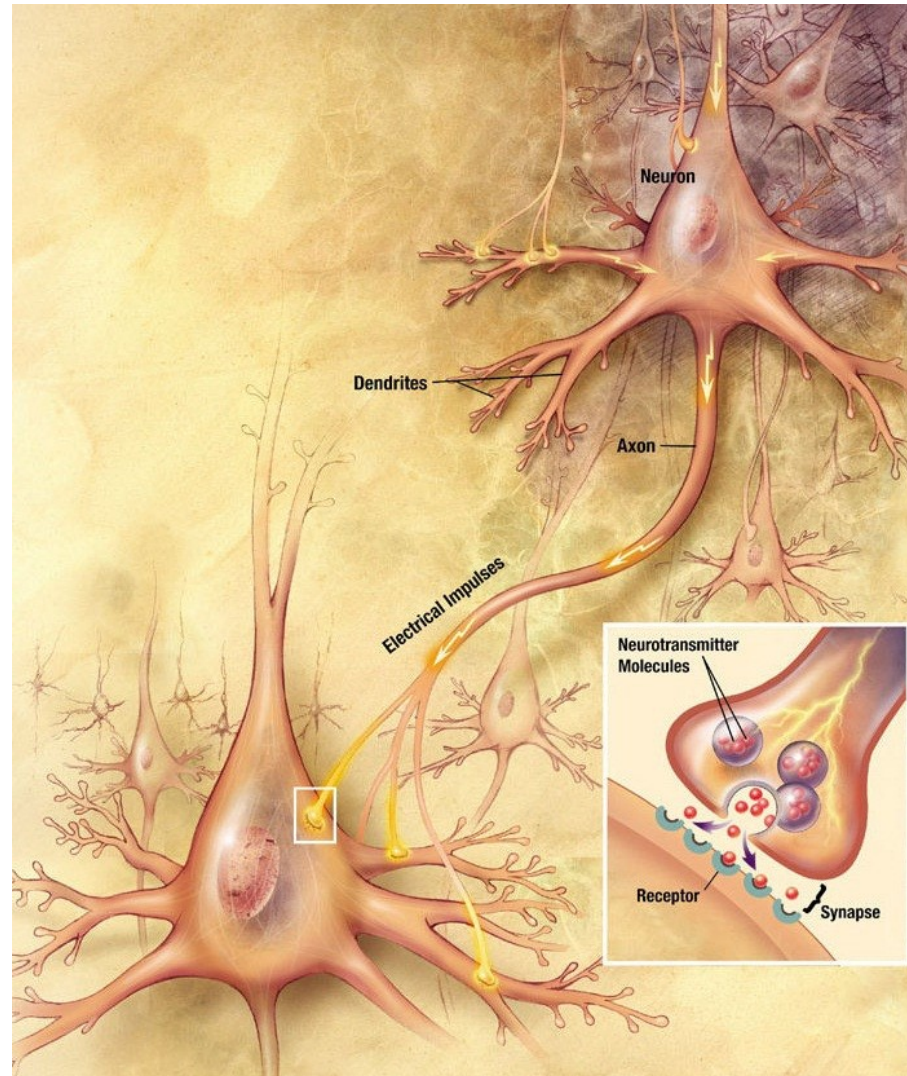


Implanting a 3rd eye

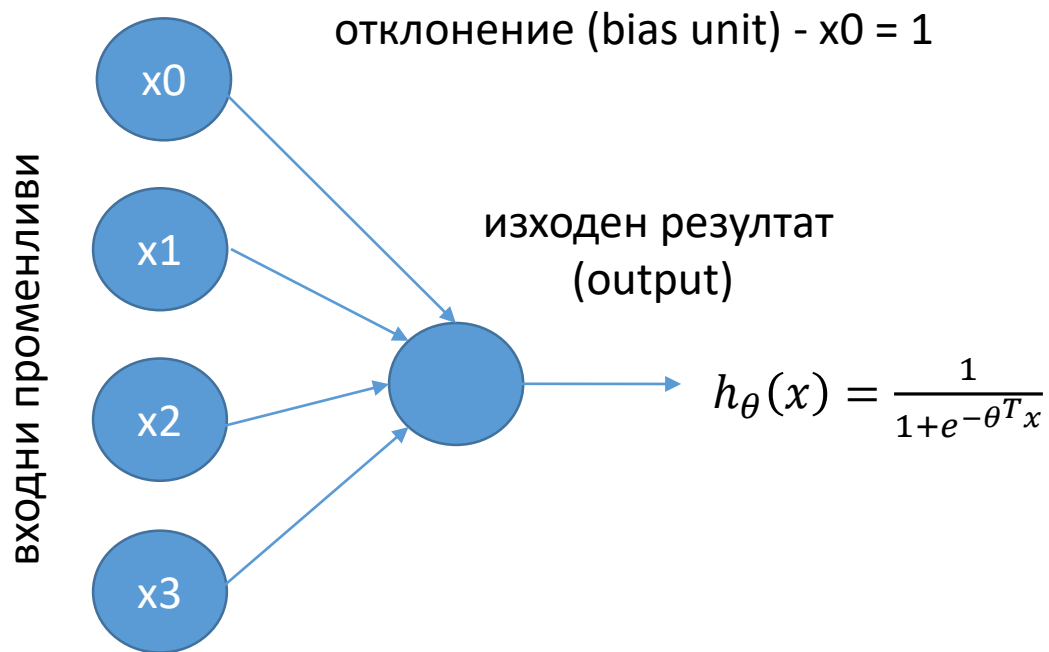
Модел на неврон в мозъка



Неврони



Модел на изчислителен неврон



$$x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

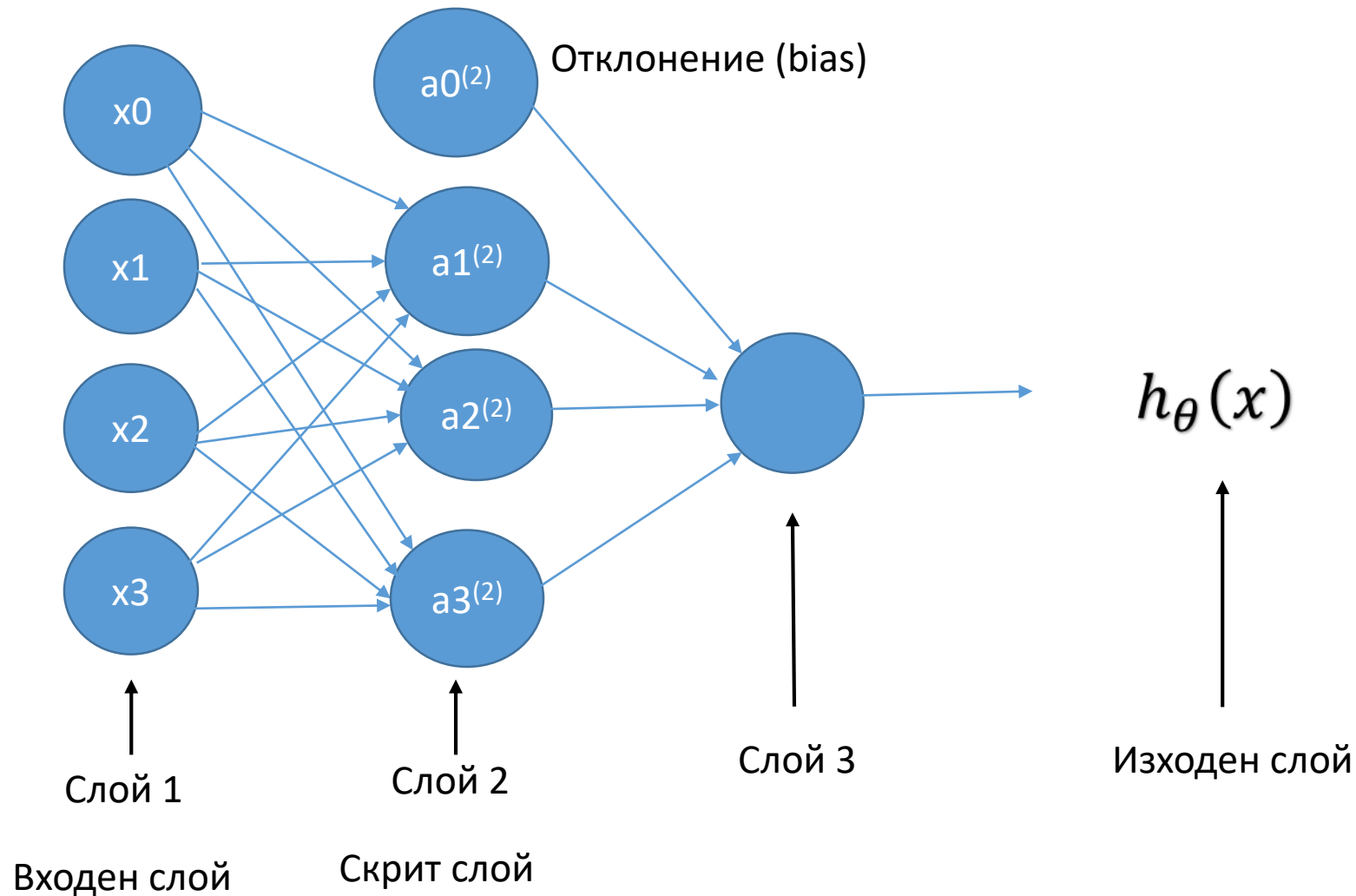
Входни
променливи

$$\theta = \begin{bmatrix} \theta_0 \\ \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix}$$

Параметри
(тегла)

- Сигмоидна (логаритмична) функция - $g(z) = \frac{1}{1+e^{-z}}$ – активираща функция (activation function)

Модел на невронна мрежа със слоеве (layers)



Означения

- $a_i^{(j)}$ - „активиране“ на връх i в слой j – активиращи върхове (activation nodes)
- $\theta^{(j)}$ - матрица с тегла, управляваща функцията на преминаване от слой j към слой $j+1$
- Невронна мрежа с един скрит слой изглежда така:

$$\bullet \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ a_3^{(2)} \end{bmatrix} \rightarrow h_{\theta}(x)$$

Изчисляване на стойностите в активиращите върхове

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= g \left(\theta_{10}^{(1)} x_0 + \theta_{11}^{(1)} x_1 + \theta_{12}^{(1)} x_2 + \theta_{13}^{(1)} x_3 \right) \\ a_2^{(2)} &= g \left(\theta_{20}^{(1)} x_0 + \theta_{21}^{(1)} x_1 + \theta_{22}^{(1)} x_2 + \theta_{23}^{(1)} x_3 \right) \\ a_3^{(2)} &= g \left(\theta_{30}^{(1)} x_0 + \theta_{31}^{(1)} x_1 + \theta_{32}^{(1)} x_2 + \theta_{33}^{(1)} x_3 \right) \\ h_{\theta}(x) &= a_1^{(3)} = g \left(\theta_{10}^{(2)} a_0 + \theta_{11}^{(2)} a_1 + \theta_{12}^{(2)} a_2 + \theta_{13}^{(2)} a_3 \right) \end{aligned}$$

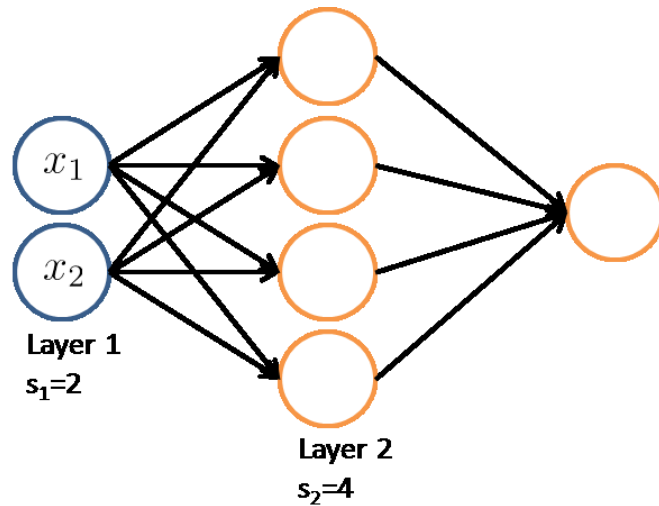
- Стойностите в активиращите върхове се изчисляват с 3×4 - размерна матрица с параметри . Параметрите във всеки ред се прилагат към входните променливи за получаване на стойността на един активиращ връх.
- Хипотезата се получава като логаритмична функция, приложена върху сумата на стойностите в активиращите върхове, умножена по матрица $\theta(2)$, съдържаща теглата във втория слой на мрежата.

Размерност на матрицата с тегла

- Всеки слой има своя матрица с тегла $\theta^{(j)}$
- Размерността на матрицата се определя по следния начин:
 - Ако мрежата има s_j върхове в слой j и s_{j+1} върхове в слой $j+1$
 $\Rightarrow \theta^{(j)}$ има размерност $s_{j+1} \times (s_j + 1)$
- +1 идва от добавяне в $\theta^{(j)}$ на върхове с отклонения x_0 и $\theta_0^{(j)}$

Контролен въпрос

Дадена е невронна мрежа със следната структура



Определете размерността на $\theta^{(1)}$ (добавете по един връх в слой 1 и 2)

- а) 2×4 б) 4×2
- в) 3×4 г) 4×3

Векторна форма на активиращите върхове

$$\begin{aligned} a_1^{(2)} &= g \left(\theta_{10}^{(1)} x_0 + \theta_{11}^{(1)} x_1 + \theta_{12}^{(1)} x_2 + \theta_{13}^{(1)} x_3 \right) \\ a_2^{(2)} &= g \left(\theta_{20}^{(1)} x_0 + \theta_{21}^{(1)} x_1 + \theta_{22}^{(1)} x_2 + \theta_{23}^{(1)} x_3 \right) \\ a_3^{(2)} &= g \left(\theta_{30}^{(1)} x_0 + \theta_{31}^{(1)} x_1 + \theta_{32}^{(1)} x_2 + \theta_{33}^{(1)} x_3 \right) \\ h_{\theta}(x) = a_1^{(3)} &= g \left(\theta_{10}^{(2)} a_0 + \theta_{11}^{(2)} a_1 + \theta_{12}^{(2)} a_2 + \theta_{13}^{(2)} a_3 \right) \end{aligned}$$

Векторна форма на активиращите върхове

- Добавяме нова променлива $z_k^{(j)}$
- $a_1^{(2)} = g(z_1^{(2)})$
- $a_2^{(2)} = g(z_2^{(2)})$
- $a_3^{(2)} = g(z_3^{(2)})$
- За слой $j=2$ връх k z ще бъде
- $z_k^{(2)} = \theta_{k,0}^{(1)} x_0 + \theta_{k,1}^{(1)} x_1 + \dots + \theta_{k,n}^{(1)} x_n$

Векторна форма

$$\bullet x = \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \quad z^{(j)} = \begin{bmatrix} z_1^{(j)} \\ z_2^{(j)} \\ \dots \\ z_n^{(j)} \end{bmatrix}$$

• Ако означим $x = a^{(1)}$, получаваме:

$$\bullet z^{(j)} = \theta^{(j-1)} a^{(j-1)}$$

$$\bullet h_{\theta}(x) = a^{(j+1)} = g(z^{(j+1)})$$

• Този алгоритъм за изчисляване на стойностите във върховете на мрежата се нарича **feedforward propagation**

Контролен въпрос

Дадена е невронна мрежа със следната структура

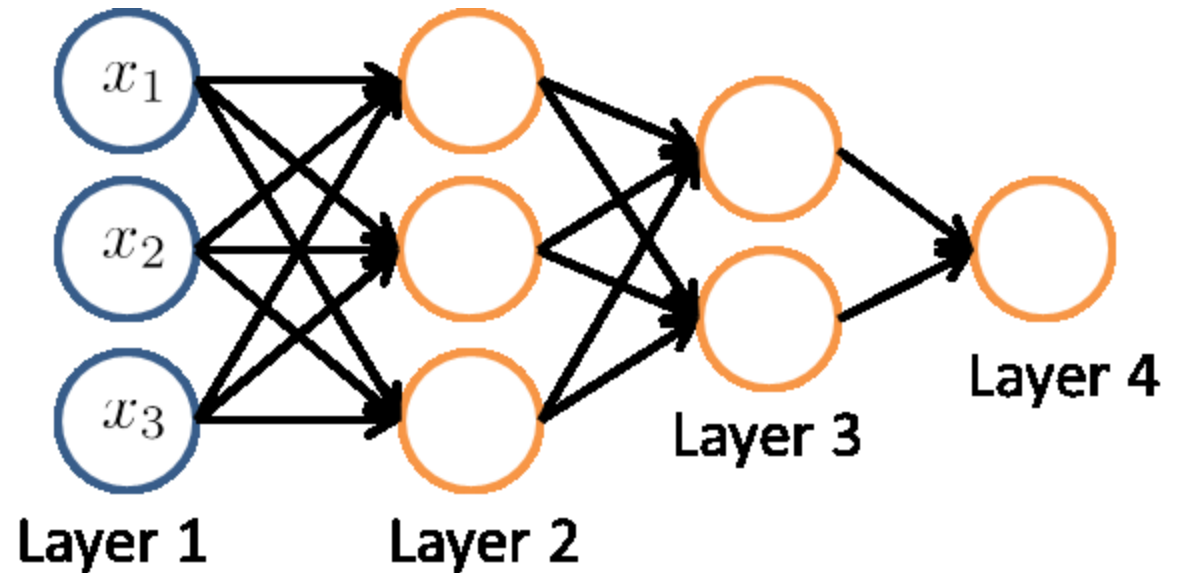
Ако $a^{(1)} = x$ е входният слой (с $a_0^{(1)} = 1$), как се изчислява $a^{(2)}$?

а) $a^{(2)} = \theta^{(1)} a^{(1)}$

б) $z^{(2)} = \theta^{(2)} a^{(1)}; a^{(2)} = g(z^{(2)})$

в) $z^{(2)} = \theta^{(1)} a^{(1)}; a^{(2)} = g(z^{(2)})$

г) $z^{(2)} = \theta^{(2)} g(a^{(1)}); a^{(2)} = g(z^{(2)})$



Прости приложения на невронна мрежа – операция логическо „И“

- Изчисляваме x_1 AND x_2 с невронна мрежа

- $\begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \rightarrow [g(z^{(2)})] \rightarrow h_\theta(x)$

- $x_0 = 1$ – отклонение

- Инициализираме матрицата $\theta^{(1)}$

- $\theta^{(1)} = [-30 \ 20 \ 20]$

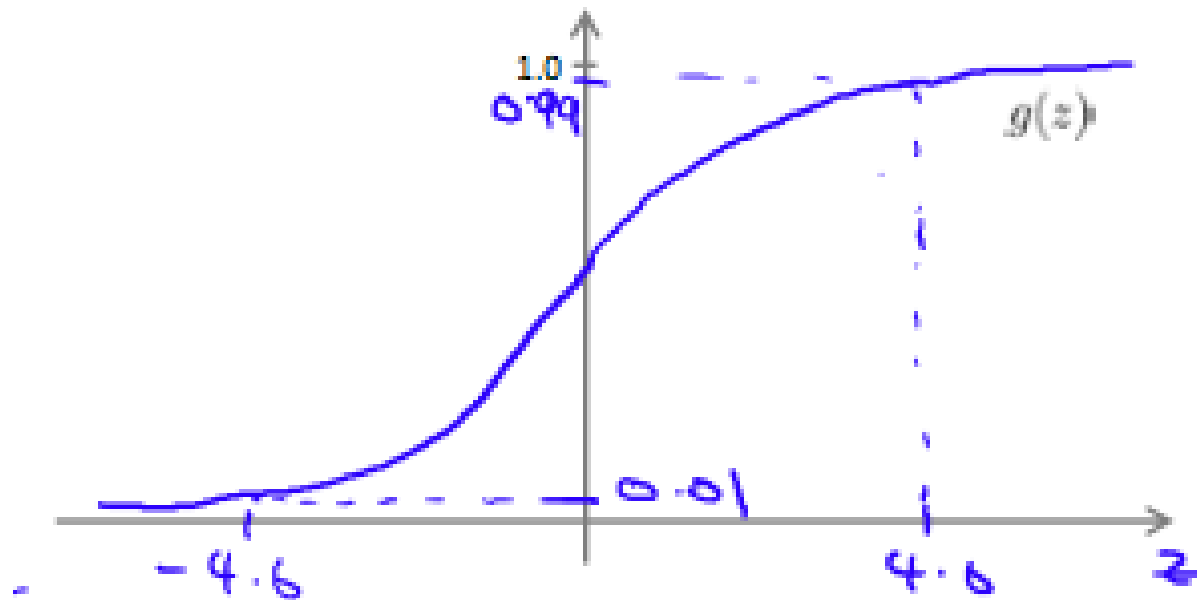
- $h_\theta(x) = g(-30 + 20x_1 + 20x_2)$

- При $x_1 = 0$ и $x_2 = 0 \Rightarrow g(-30) \cong 0$

- При $x_1 = 0$ и $x_2 = 1 \Rightarrow g(-10) \cong 0$

- При $x_1 = 1$ и $x_2 = 0 \Rightarrow g(-10) \cong 0$

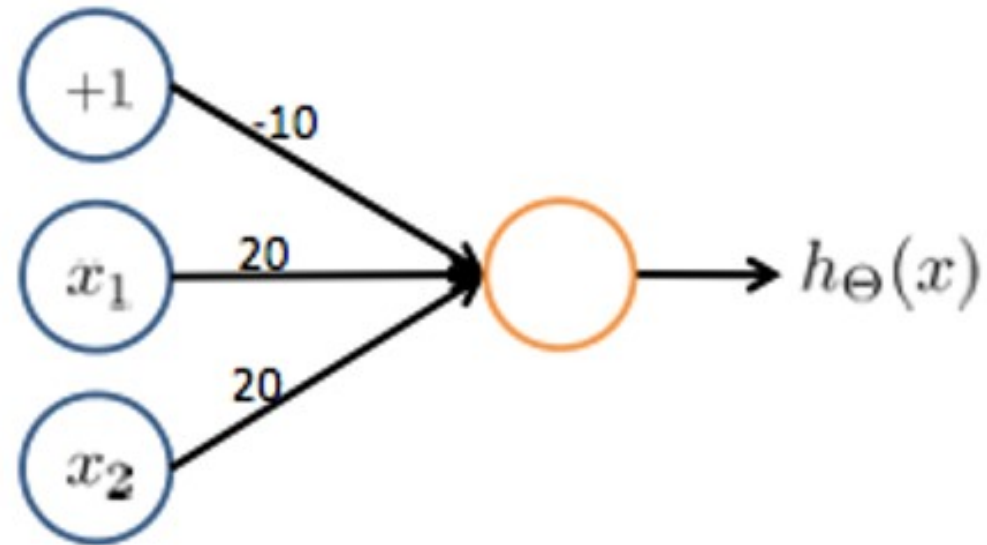
- При $x_1 = 1$ и $x_2 = 1 \Rightarrow g(10) \cong 1$



Контролен въпрос

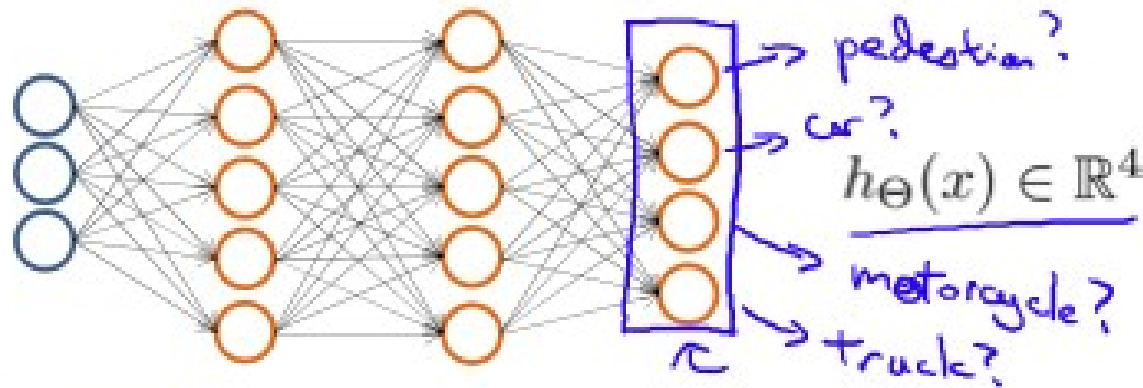
Нека променливите x_1 и x_2 приемат двоични стойности $\{0,1\}$. Коя булева функция изчислява приблизително показаната невронна мрежа?

- а) x_1 AND x_2
- б) (NOT x_1) OR (NOT x_2)
- в) x_1 OR x_2
- г) (NOT x_1) AND (NOT x_2)



Невронни мрежи – класификация в множество класове

Multiple output units: One-vs-all.



Want $h_{\Theta}(x) \approx \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h_{\Theta}(x) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $h_{\Theta}(x) \approx \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, etc.
when pedestrian when car when motorcycle

Невронни мрежи – класификация в множество класове

- $y^{(i)}$ представлява някое от изображенията (пешеходец, автомобил, мотор, камион)

$$y^{(i)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0^{(2)} \\ a_1^{(2)} \\ a_2^{(2)} \\ \dots \end{bmatrix} \rightarrow \begin{bmatrix} a_0^{(3)} \\ a_1^{(3)} \\ a_2^{(3)} \\ \dots \end{bmatrix} \rightarrow \dots \rightarrow \begin{bmatrix} h_{\Theta}(x)_1 \\ h_{\Theta}(x)_2 \\ h_{\Theta}(x)_3 \\ h_{\Theta}(x)_4 \end{bmatrix}$$

- Резултатът от изчисляването на хипотезата изглежда например:

- $y = h_{\theta}(x) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$